

**Parameterschätzverfahren zur on-line Identifikation
dynamischer Systeme im offenen und geschlossenen
Regelkreis**

Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines
Doktor – Ingenieurs
der
Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Dipl.-Math. Bernd Bauer
aus Neckarsulm

Bochum 1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546602_0068

**Parameterschätzverfahren zur on-line Identifikation
dynamischer Systeme im offenen und geschlossenen
Regelkreis**

Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines
Doktor – Ingenieurs
der
Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Dipl.-Math. Bernd Bauer
aus Neckarsulm

Bochum 1977



Dissertation eingereicht am: 11.2.1977

Tag der mündlichen Prüfung: 18.5.1977

Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. W. Weber

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Abteilung Prozeßrechner und Regelungstechnik des Instituts für Verfahrenstechnik und Dampfkesselwesen an der Universität Stuttgart. Sie wurde von Herrn Professor Dr.-Ing. H. Unbehauen angeregt und wissenschaftlich geleitet.

Bei Herrn Professor Dr.-Ing. H. Unbehauen bedanke ich mich sehr herzlich für die stetige Förderung meiner Arbeit, die zahlreichen Ratschläge und die kritischen Bemerkungen.

Herrn Professor Dr.-Ing. W. Weber danke ich für die Übernahme des Mitberichtes.

Mein Dank gilt auch allen meinen Kollegen, die mir Gelegenheit gaben zu zahlreichen fruchtbaren Diskussionen und Gesprächen.

Die finanziellen Mittel für die Untersuchungen stellte das Bundesministerium für Forschung und Technologie (Kennzeichen DV 5.505) im Rahmen des Projektes "Prozeßlenkung mit DV-Anlagen (PDV)" des 2. DV-Programmes der Bundesregierung sowie die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen der Projekte Un 25/7 und Un 25/11 zur Verfügung.

Stuttgart, im Januar 1977.

Bernd Bauer

INHALTSVERZEICHNIS

=====

	Seite
Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen	6
1. EINFÜHRUNG UND PROBLEMSTELLUNG	9
2. IDENTIFIKATION MIT PARAMETERSCHÄTZVERFAHREN	15
2.1 Prinzipielle Vorgehensweise	15
2.2 Festlegung der Modellstruktur	17
2.3 Untersuchte Parameterschätzverfahren	25
2.3.1 Erweiterte Least Squares-Methoden (RLS-, 1.-3.EM-Methode)	25
2.3.2 Hilfsvariablen-Methode (IV-Methode)	30
2.3.3 Rekursive Maximum Likelihood-Methode (RML-Methode)	34
2.4 Einheitliche Darstellung der rekursiven Schätzgleichungen	39
3. ERPROBUNG AN SYSTEMEN MIT KONSTANTEN PARAMETERN IM OFFENEN REGELKREIS	42
3.1 Testprozesse und Testbedingungen	42
3.2 Maßnahmen zur Konvergenzverbesserung	48
3.3 Ergebnisse der Parameterschätzverfahren	54
3.3.1 System ohne Rauschen und Drift	54
3.3.2 System mit Rauschen	59
3.3.3 System mit Rauschen und Drift	62
3.3.4 Richtlinien für den Einsatz der Para- meterschätzverfahren	64
3.4 Leistungsvergleich der Parameterschätzverfahren	65
4. IDENTIFIKATION ZEITVARIANTER SYSTEME MIT DER HILFSVARIABLEN-METHODE	71
4.1 Gewichtung der Meßdaten	71
4.2 Modellierung der Parameteränderungen	75
4.3 Das untersuchte Regelsystem	80

	Seite
4.4 Ergebnisse der Identifikation	82
4.4.1 Änderungsrate A	85
4.4.2 Änderungsrate B	89
4.4.3 Änderungsrate C	95
4.4.4 Änderungsrate D	98
4.4.5 Diskussion der Ergebnisse	98
4.5 Richtlinien zur Wahl optimaler Gewichts- faktoren	101
4.5.1 Verfahren G 1 und G 3	101
4.5.2 Verfahren M 3	103
4.5.3 Ein Konzept zur Identifikation zeit- varianter Systeme	104
5. IDENTIFIKATION IM GESCHLOSSENEN REGELKREIS	107
5.1 Indirekte Identifikation (ID)	108
5.2 Direkte Identifikation (DI)	110
5.3 Identifikationsergebnisse	112
5.4 Beurteilung der Schätzergebnisse	117
6. PRAKTISCHE ANWENDUNG DER HILFSVARIABLEN-METHODE ZUR IDENTIFIKATION EINES WÄRMETAUSCHERS	120
6.1 Das untersuchte System	120
6.2 Identifikation bei konstanten Parametern der Streckenheizung	123
6.3 Identifikation der Streckenheizung unter dem Einfluß von Durchsatzänderungen	126
7. ZUSAMMENFASSUNG	129
8. LITERATURVERZEICHNIS	132

	Seite
ANHANG A: Statistische Eigenschaften der Schätzwerte	141
A.1 Einige grundlegende Begriffe und Voraussetzungen	141
A.2 Parameterschätzung mit den erweiter- ten LS-Methoden	143
A.3 Parameterschätzung mit der IV-Methode	147
 ANHANG B: Rekursive Version des Schätzalgorithmus	148
B.1 Ungewichteter Algorithmus	148
B.2 Gewichteter Algorithmus	150
 ANHANG C: Rekursivalgorithmus für den Vektor $\underline{m}$ bei der RML-Methode	153

ZUSAMMENSTELLUNG DER WICHTIGSTEN FORMELZEICHEN

=====

$\hat{}$	Kennzeichen eines Schätzwertes
$A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1}), D(z^{-1})$	Polynome mit den Parametern a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, n$)
$A_H(z^{-1}), B_H(z^{-1})$	Polynome in der Übertragungsfunktion des Hilfsmodells
a_i, b_i, c_i, d_i	Parameter der Teilmodelle
$\Delta_k b_i$	Änderungsgeschwindigkeit der Parameter b_i
d_{1N}	Driftpegel
E, e	Fehlersignal
$E\{ \}$	Erwartungswert
G_m	Übertragungsfunktion des Modells für den deterministischen Prozeßteil
G_R	Übertragungsfunktion des Reglers
G_r	Übertragungsfunktion des Störmodells
h	Übergangsfunktion
$I_{1,2,3}$	Fehlerfunktion
$\underline{I}$	Einheitsmatrix
K_R	Verstärkungsfaktor des Reglers
K_S	Verstärkungsfaktor der Strecke
$\Delta_k K_S$	Änderungsgeschwindigkeit des Verstärkungsfaktors K_S

k	diskrete Zeitvariable (auf T normiert)
k^R	Rücksetzzeitpunkt
$\underline{M}, \underline{P}$	Datenmatrizen
$\dot{M}$	Durchsatz
$\underline{m}$	Datenvektor
N	Anzahl der Meßwerte
N_u	Impulszahl des PRBS-Signals
n	Modellordnung
n_o	Ordnung der Regelstrecke
$\underline{P}^*$	Kovarianzmatrix der Schätzfehler
$\underline{p}$	Parametervektor
$\underline{p}_H$	Parametervektor des Hilfsmodells
$\underline{\tilde{p}}$	Schätzfehlervektor
Q	Heizleistung
R_1, r_1	Störsignal
R_2, r_2	zusätzliches, am Reglerausgang aufgeschaltetes Testsignal
R_{uu}, R_{uy}	Auto-, Kreuzkorrelationsfunktion
s	Komplexe Variable $s = \sigma + j\omega$ oder speziell $j\omega$ (für kontinuierliche Größen)
T	Abtastzeit
T_a	Abklingzeit

T_{mes}	Meßzeit
T_u	Periodendauer ($T_u = N_u \cdot \Delta t_u$)
T_1	dominierende Zeitkonstante
T_I	Zeitkonstante des PI-Reglers
t	kontinuierliche Zeitvariable
Δt_u	Dauer eines Einzelimpulses des Testsignals
U, u	Eingangssignal
V, v	korreliertes Fehlersignal
$\underline{W}$	Hilfsvariablenmatrix
$\underline{w}$	Hilfsvariablenvektor
X, x	Ausgangssignal des deterministischen Prozeßteils
Y, y	Ausgangssignal
Y_H, y_H	Hilfsvariable
Y_m, y_m	Ausgangssignal des Modells für den deterministischen Prozeßteil
$\underline{z}, \underline{G}^*$	Gewichtsmatrizen
z	komplexe Variable $z = \exp (s T)$ für Abtastgrößen
α	Diagonalelemente der Startmatrix $\underline{P}(0)$
ϑ	Temperatur
λ_{r_1}	Standardabweichung des Störsignals
λ_s	Störpegel
$\rho, \rho_0, \Delta \rho, g_{ii}$	Gewichtsfaktoren

1. EINFÜHRUNG UND PROBLEMSTELLUNG

=====

Moderne Automatisierungskonzepte, die u.a. die Überwachung, Vorhersage, Fehlerfrüherkennung, Steuerung und Regelung von Prozessen beinhalten, setzen eine genaue Kenntnis des statischen und dynamischen Verhaltens der betreffenden Systeme in Form eines mathematischen Modells voraus. Dieses Modell kann aufgrund physikalischer Zusammenhänge mit Hilfe einer theoretischen Systemanalyse ermittelt werden. Wegen der wachsenden Komplexität vieler industrieller Strecken, die oft noch durch nichtmeßbare und einer analytischen Behandlung nicht zugängliche Störungen beeinflußt werden, wird jedoch eine sinnvolle theoretische Analyse des Prozeßverhaltens in Form von Bilanzgleichungen häufig sehr erschwert, wenn nicht gar unmöglich gemacht. In diesem Zusammenhang gewinnen Verfahren zur Systemidentifikation, d.h. Verfahren zur experimentellen Analyse auf der Grundlage gemessener Prozeßsignale, immer größere Bedeutung.

Da viele Automatisierungsaufgaben, darunter die experimentelle Systemanalyse ebenso wie die anschließende Regelung, in zunehmendem Maße Prozeßrechnern übertragen werden, die heute bereits bei einer Vielzahl technischer Prozesse im Echtzeitbetrieb eingesetzt sind, ergeben sich nicht nur von seiten des zu identifizierenden Prozesses, sondern auch bedingt durch den verwendeten Prozeßrechner verschiedene Forderungen, die ein geeignetes Identifikationsverfahren erfüllen sollte:

1. Das Verfahren soll in der Lage sein, bei einem hohen Maß an numerischer Stabilität und schneller Konvergenz möglichst genaue Ergebnisse (Modelle) für Systeme unterschiedlicher Struktur zu liefern, auch wenn oft nur wenige Informationen über den Prozeß und die auftretenden Störungen vorliegen. Falls der normale Prozeßablauf nicht beeinträchtigt werden darf, müssen zur Identifikation auch die natürlichen Betriebssignale verwendet werden können.

Darüberhinaus muß die Modellbildung - auch für zeitvariante Systeme - sowohl im offenen als auch im geschlossenen Regelkreis möglich sein. Schließlich sollte das Ergebnis der Identifikation (Modell) in einer Form vorliegen, die eine problemlose Weiterverwendung, z.B. zur Lösung und Unterstützung von Regelungsaufgaben, gewährleistet.

2. Im Zusammenhang mit einem Prozeßrechnereinsatz muß das Verfahren eine Modellbildung in Echtzeit ermöglichen und der dadurch bedingten engen Begrenzung der Rechenzeit und ebenso der Speicherkapazität entsprechend angepaßt sein.

Diesem Katalog von Forderungen steht eine Vielzahl von leistungsfähigen Verfahren zur Systemidentifikation gegenüber, die man entsprechend ihrer Konzeption für bestimmte Typen von Prozeßsignalen in 2 Gruppen unterteilt:

Bei den deterministischen Verfahren (Identifikation auf der Grundlage von Frequenzgang- bzw. Übergangsfunktionsmessungen) werden als Eingangsgrößen des zu untersuchenden Systems deterministische Testsignale unterschiedlicher Charakteristik eingesetzt, die jedoch oft eine zu starke Störung des Prozesses zur Folge haben. Durch den Einsatz von statistischen Verfahren wird dagegen die Verwendung der im normalen Prozeßablauf anfallenden, meist stochastischen Signalverläufe bzw. spezieller stochastischer Testsignale ermöglicht.

Die bekanntesten Vertreter dieser Gruppe sind neben Korrelationsverfahren vor allem die zur Verarbeitung zeitdiskreter (abgetasteter) Prozeßsignale konzipierten Parameterschätzverfahren, die speziell bei Prozessen mit großen stochastischen Störungen eingesetzt werden und nur wenig Vorkenntnisse über das zu identifizierende System verlangen. Parameterschätzverfahren liefern darüberhinaus parametrische Modelle (Modelle mit Struktur, die die Parameter explizit enthalten) als Identifikationsergebnisse, die zur Weiterverwendung meist besser geeignet sind als nichtparametrische Modelle (wie z.B. bei der Korrelationsanalyse).

Wegen der unterschiedlichen numerischen Algorithmen, die zur Ermittlung der Schätzergebnisse eingesetzt werden, unterscheidet man

- direkte,
- iterative und
- rekursive Parameterschätzverfahren.

Während sich die Modellparameter bei den direkten Verfahren in einem Zug ermitteln lassen, wobei nur eine einzige Verarbeitung des aus den abgetasteten Ein- und Ausgangssignalwerten bestehenden Datensatzes erforderlich ist, werden sie von den iterativen Verfahren durch eine wiederholte Verarbeitung dieser Meßwerte schrittweise bestimmt.

Bei den rekursiven Parameterschätzverfahren werden die Parameter dagegen bei jedem Abtastschritt aufgrund der beim vorhergegangenen Schritt erhaltenen Information durch Hinzunahme eines neuen Meßwertepaares neu berechnet. Eine Datenspeicherung ist im Gegensatz zu den nichtrekursiven Verfahren unnötig.

Werden bei der Systemidentifikation mit Hilfe eines Prozeßrechners Datenerfassung und Parameterschätzung gleichzeitig durchgeführt, so erhält man die Modellparameter in Echtzeit. Für diese sog. on-line Identifikation sind die rekursiven Parameterschätzverfahren aus folgenden Gründen besonders geeignet:

1. Da keine Datenspeicherung erforderlich ist, wird nur eine geringe Speicherkapazität benötigt.
2. Da die Parameterschätzung in Echtzeit durchgeführt wird, ist die Identifikation zeitvarianter Prozesse möglich.
3. Wegen der rekursiven Arbeitsweise ist jederzeit ein Zugang zu Zwischenergebnissen möglich.
4. Rekursive Algorithmen erfordern einen geringeren numerischen Aufwand und deshalb i.a. kurze Rechenzeiten.

Diese Eigenschaften sowie die vorangegangene Gegenüberstellung verschiedener experimenteller Analyseverfahren machen deutlich, daß speziell rekursive Parameterschätzverfahren die oben aufgestellten Forderungen an ein geeignetes Identifikationsverfahren am besten erfüllen.

In den vergangenen Jahren sind nun verschiedene teils vorzügliche Übersichtsarbeiten über Parameterschätzverfahren erschienen [1 bis 11]. Neben Studien über spezielle Methoden [12 bis 16] sind zahlreiche Vergleiche sowohl rekursiver als auch nichtrekursiver Parameterschätzverfahren veröffentlicht worden, von denen hier nur die wichtigsten angegeben werden können [17 bis 28, 48]. Dabei haben sich vor allem zwei rekursive Schätzverfahren als besonders leistungsfähig erwiesen: das modifizierte Korrelationsverfahren (KOR) und die Hilfsvariablen-Methode (auch als Methode der instrumentellen Variablen (IV-Methode) bezeichnet) [19, 20, 27 bis 29, 48]. Trotz dieser Vielzahl von Untersuchungen sind jedoch keine Arbeiten bekannt, in denen neben einem Leistungsvergleich rekursiver Parameterschätzverfahren auch deren Eignung zur Prozeßidentifikation im geschlossenen Regelkreis und zur Identifikation zeitvarianter Systeme überprüft wird. Die vorliegende Arbeit will deshalb versuchen, zur Klärung dieser Probleme beizutragen.

Die Arbeit setzt sich aus 3 Hauptteilen zusammen. Im 1. Teil werden die rekursiven Versionen der

- Least Squares-Methode (RLS-Methode) [31],
- Hilfsvariablen-Methode (IV-Methode) [24, 32, 33],
- 1. erweiterten Matrizen-Methode (1. EM-Methode) [24, 25],
- 2. erweiterten Matrizen-Methode (2. EM-Methode) [24, 25],
- 3. erweiterten Matrizen-Methode (3. EM-Methode) [24, 25] und
- Maximum Likelihood-Methode (RML-Methode) [34]

zur on-line Identifikation von 2 analog simulierten linearen, zeitinvarianten Eingrößensystemen 2. und 3. Ordnung eingesetzt. Dabei werden vor allem folgende Gesichtspunkte berücksichtigt:

- Wahl von Testsignal und Abtastzeit,
- Wahl der Anfangswerte für die Rekursionalgorithmen der einzelnen Verfahren,
- Leistungsfähigkeit unter extremen Betriebsbedingungen (Überlagerung des Prozeßausgangssignals durch hochfrequente stochastische Störungen und niederfrequente Störungen (Drift)),
- Konvergenz, numerische Stabilität,
- Programmieraufwand sowie Rechenzeit und Speicherplatzbedarf.

Auf der Grundlage der dabei erzielten Schätzergebnisse wird schließlich ein umfassender Leistungsvergleich zwischen den 6 untersuchten Verfahren durchgeführt:

Im 2. Teil der Arbeit werden zur on-line Identifikation eines analog simulierten Systems 2. Ordnung mit zeitvarianten Parametern verschiedene auf

- einer Gewichtung der Meßdaten bzw.
- einer Modellierung der Parameteränderungen

basierende Modifikationen der Hilfsvariablen-Methode untersucht und miteinander verglichen. Mit Hilfe der dabei erzielten Ergebnisse wird ein Konzept zur Identifikation zeitvarianter Systeme vorgeschlagen, das es ermöglicht, mit vertretbarem Zeitaufwand eine optimale Anpassung der Parameter zu erhalten.

Im 3. Teil der Arbeit werden verschiedene Möglichkeiten zur on-line Identifikation von Strecken im geschlossenen Regelkreis angegeben und die entsprechend modifizierten Algorithmen der Hilfsvariablen-Methode zur Modellbildung an einem System dritter Ordnung eingesetzt. Dabei wird vor allem die Abhängigkeit der Schätzergebnisse von auftretenden Störungen untersucht. Schließlich wird ein umfassender Vergleich zwischen Identifikationsergebnissen im offenen und geschlossenen Kreis durchgeführt.

Um auch die praktische Relevanz der in den 3 Hauptabschnitten an analog simulierten Systemen erzielten Ergebnisse überprüfen zu können, werden die leistungsfähigsten Verfahren zur on-line Identifikation eines Wärmetauschers im geschlossenen Regelkreis eingesetzt, der aufgrund von Durchsatzänderungen zeitvariantes dynamisches Verhalten aufweist. Anhand dieser praktischen Anwendung werden abschließend die zuvor gemachten Aussagen und aufgestellten Richtlinien kritisch auf ihre Gültigkeit hin überprüft.

Mit dieser Arbeit steht gleichzeitig - als Erweiterung von [30] - ein allgemein verwendbares und leicht zu handhabendes Programmpaket für den Prozeßrechner HP 2100 zur on-line Identifikation linearer dynamischer Systeme zur Verfügung, bei dessen Konzeption die in den angegebenen Untersuchungen gemachten Erfahrungen berücksichtigt worden sind.

2. IDENTIFIKATION MIT PARAMETERSCHÄTZVERFAHREN

=====

2.1 Prinzipielle Vorgehensweise

Zur Systembeschreibung werden im Zusammenhang mit Parameterschätzverfahren Modelle mit Struktur (parametrische Modelle) verwendet. Diese Struktur muß aufgrund des Identifikationszieles, bzw. evtl. noch zu beschaffender Vorkenntnisse über den Prozeß festgelegt werden. Im allgemeinen wird dabei von linearen Modellen ausgegangen, die wegen der diskontinuierlichen Arbeitsweise eines Prozeßrechners in zeitdiskreter Form vorliegen. Da auch die zur Identifikation verwendeten Prozeßsignale in diskreter Form benötigt werden, ist im Fall eines kontinuierlichen Prozesses eine Abtastung dieser Signale zu diskreten Zeitpunkten erforderlich. Entsprechend der Beschreibung des dynamischen Verhaltens kontinuierlicher Systeme im Zeitbereich durch Differentialgleichungen oder im Frequenzbereich durch Übertragungsfunktionen läßt sich das dynamische Verhalten abgetasteter Systeme durch Differenzgleichungen im Zeitbereich, bzw. diskrete Übertragungsfunktionen im z -Bereich angeben.

Die Parameter eines solchen zeitdiskreten Modells ergeben sich mit Parameterschätzverfahren nach Bild 2.1 durch einen Vergleich zwischen Prozeßausgangsgröße $y(k)$ und Modellausgang $y_m(k)$. Prozeß und Modell sind dabei parallel angeordnet und werden beide durch das Eingangssignal $u(k)$ angeregt.

Der Vergleich führt auf ein Fehlersignal $e(k)$, das nur im störungsfreien Fall stationär auf Null gebracht werden kann. Im allgemeinen wird sich jedoch selbst bei richtig gewählter Modellstruktur wegen der vorhandenen Störungen $r_1(k)$ ein von Null verschiedener Fehler $e(k)$ einstellen. $e(k)$ ergibt sich allerdings nicht nur als Folge der auf den Prozeß einwirkenden

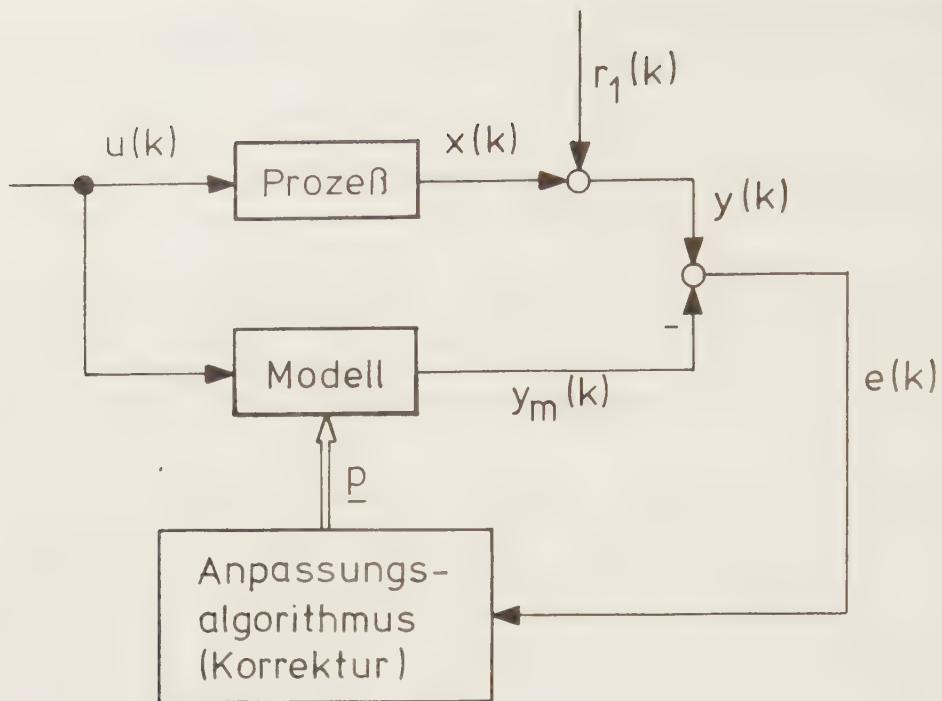


Bild 2.1: Prinzipieller Ablauf einer Identifizierung mit Parameterschätzverfahren

den Störungen, sondern enthält auch Fehler, die durch die Diskretisierung des kontinuierlichen Prozesses, eine evtl. notwendige Linearisierung oder eine falsch gewählte Modellstruktur entstanden sind. Schätzwerte $\underline{\hat{p}}$ der unbekannten Modellparameter $\underline{p}$ erhält man schließlich durch die Forderung, eine geeignet gewählte Funktion des Fehlers $e(k)$ zum Minimum zu machen. In den meisten Fällen werden dazu quadratische Fehlerfunktionen verwendet, die direkt auf die grundlegende Gauß'sche Methode der kleinsten Fehlerquadrate führen.

Speziell bei der on-line Identifikation mit rekursiven Schätzverfahren erfolgt die Parameterschätzung bzw. Modellanpassung durch Verarbeitung der jeweils aktuellen Beobachtungen der Ein- und Ausgangsgrößen $u(k)$ und $y(k)$, wobei die Parameter rekursiv durch die mit einem Korrekturfaktor versehene Differenz von Modell- und Prozeßausgang verbessert werden (Bild 2.1).

2.2 Festlegung der Modellstruktur

Bei der Modellbildung mit Hilfe von Parameterschätzverfahren wird der zu identifizierende Prozeß als ein deterministisches Übertragungssystem angenommen, dessen ungestörtes, aber nicht meßbares Ausgangssignal $x(k)$ von einem stochastischen Störsignal $r_1(k)$ überlagert wird (Bild 2.1). $r_1(k)$ enthält dabei Meßrauschen und auf den Systemausgang transformiertes Prozeßrauschen. Für das eigentlich meßbare Ausgangssignal $y(k)$ des Prozesses gilt somit

$$y(k) = x(k) + r_1(k) \quad (2.1a)$$

oder nach einer z-Transformation der Signale

$$Y(z) = X(z) + R_1(z). \quad (2.1b)$$

Man nimmt nun weiter an, daß sich der ungestörte Prozeß als lineares, diskretes Übertragungssystem n-ter Ordnung mit der Eingangsgröße $u(k)$ und der Ausgangsgröße $y_m(k)$ im Zeitbereich in Form der Differenzengleichung

$$y_m(k) + \sum_{i=1}^n a_i y_m(k-i) = \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) \quad (2.2)$$

beschreiben läßt.⁺⁾ Nach Anwendung des Verschiebesatzes der z-Transformation und Einführung der Polynome

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \quad (2.3)$$

und

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \quad (2.4)$$

⁺⁾ Dabei wurde durch zweckmäßige Normierung der Koeffizient a_0 gleich 1 gesetzt. Weiterhin wurden zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung sprungfähige Systeme, die im technischen Bereich selten vorkommen, nicht berücksichtigt ($b_0 = 0$). Die entwickelten Prozeßrechnerprogramme lassen sich jedoch auch auf Systeme mit $b_0 \neq 0$ anwenden.

erhält man daraus die äquivalente diskrete Übertragungsfunktion

$$G_m(z) = \frac{Y_m(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (2.5)$$

und damit eine Beschreibung (Modell) für den deterministischen Teil des Prozesses in der Form

$$Y_m(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \cdot U(z). \quad (2.6)$$

Liegt nach Gl. (2.1) und Gl. (2.6) die Struktur von System und Modell einmal fest, so müssen durch Anwendung eines geeigneten Schätzverfahrens die Modellparameter a_i und b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) so ermittelt werden, daß sich eine möglichst exakte Übereinstimmung zwischen Modell und Prozeß ergibt. Als Maß für diese Übereinstimmung verwendet man ein Fehlersignal $e(k)$, das man aus dem Vergleich von meßbarem Systemausgang $y(k)$ und berechenbarem Modellausgang $y_m(k)$ erhält. Definiert man $e(k)$ gemäß Bild 2.1 durch die unmittelbare Differenz

$$e(k) = y(k) - y_m(k) \quad (2.7a)$$

oder

$$E(z) = Y(z) - Y_m(z) \quad (2.7b)$$

als Ausgangsfehler

$$E(z) = Y(z) - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) \quad (2.8)$$

mit $Y_m(z)$ nach Gl. (2.6), so ergibt sich ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen dem Fehler $E(z)$ und den zu schätzenden Parametern a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) aus $A(z^{-1})$. Um jedoch lineare Beziehungen zur Ermittlung der unbekannten Modellparameter

heranziehen zu können und deren iterative Bestimmung zu vermeiden, wird $E(z)$ durch Multiplikation der rechten Seite von Gl. (2.8) mit $A(z^{-1})$ neu definiert:

$$E(z) = A(z^{-1}) Y(z) - B(z^{-1}) U(z) \quad (2.9a)$$

oder

$$e(k) = y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i u(k-i). \quad (2.9b)$$

Da $e(k)$ nun keinen Ausgangsfehler, gegeben als direkte Differenz zweier Signale, mehr beschreibt, wird es auch als Gleichungsfehler (engl.: residual) bezeichnet (Bild 2.2).

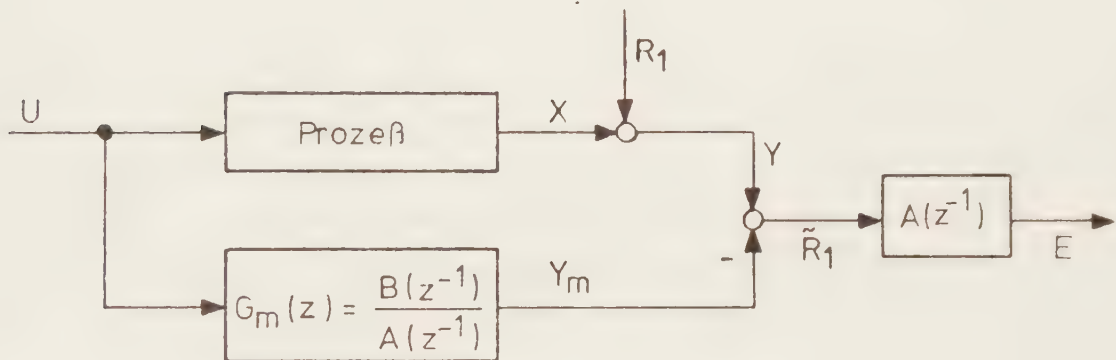


Bild 2.2: Modell zur Ermittlung des Gleichungsfehlers

$e(k)$ kann schließlich auch als Vorhersagefehler (engl.: prediction error) angesehen werden, wenn man Gl. (2.9a) in der Form

$$E(z) = Y(z) - Y_v(z) \quad (2.10)$$

mit

$$Y_v(z) = [1 - A(z^{-1})] Y(z) + B(z^{-1}) U(z) \quad (2.11a)$$

bzw.

$$\hat{y}_V(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (2.11b)$$

darstellt. $\hat{y}_V(k)$ ist in diesem Fall eine Vorhersage (Prädiktion) von $y(k)$ auf der Grundlage vorangegangener Meßwerte, d.h.,

$$\hat{y}_V(k) = y(k/k-1). \quad (2.12)$$

Da sich $e(k)$ somit als Differenz zwischen gemessener und vorhergesagter Ausgangsgröße ergibt (Vorhersagefehler), läßt sich Gl. (2.9) auch als Prädiktionsmodell interpretieren (Bild 2.3).

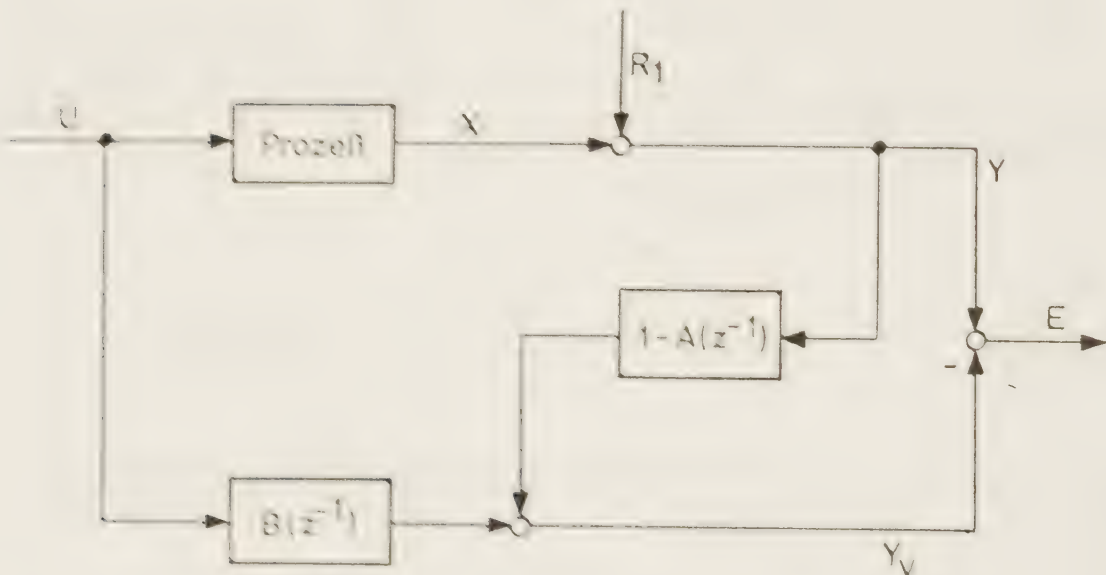


Bild 2.3: Modell zur Ermittlung des Vorhersagefehlers

Der nächste Schritt besteht nun darin, durch Minimierung einer geeignet gewählten quadratischen Funktion des durch den Modellansatz nach Gl. (2.9) definierten Gleichungsfehlers $e(k)$ Schätzwerte für die unbekannten Modellparameter a_i und b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) zu ermitteln. Als einfachstes Schätzverfahren zur Lösung dieser Aufgabenstellung kann die Methode der kleinsten Fehlerquadrate (auch als Least Squares (LS)-Methode bezeichnet) angesehen werden, die unmittelbar Gl. (2.9) als grundlegenden Modellansatz verwendet. Die Least Squares-Methode liefert jedoch nur dann Schätzungen ohne systematischen Fehler (Bias), wenn sich der Gleichungsfehler $e(k)$ wie weißes Rauschen verhält (siehe Abschnitt 2.3.1). Tatsächlich ist $e(k)$ wegen

$$E(z) = A(z^{-1}) \tilde{R}_1(z) \quad (2.13)$$

nach Bild 2.2 jedoch eine Funktion der autokorrelierten stochastischen Störung $\tilde{R}_1(k)$ und somit selbst ein korreliertes Fehlersignal, das zu einem systematischen Fehler führt. Dieser Bias bei der Least Squares-Methode gibt nun Anlaß, andere Parameterschätzverfahren einzusetzen, die versuchen, diesen Fehler zu reduzieren oder abzubauen.

Hierzu wurde einerseits die Hilfsvariablen- (IV-)Methode entwickelt, bei der - ausgehend von dem Modellansatz nach Gl. (2.9) - durch Filterung des Eingangssignals sog. Hilfsvariablen gewonnen und zur Parameterschätzung herangezogen werden, die zwar streng mit den Nutzsignalen des Systems, nicht aber mit dem Störsignal korreliert sind. Auf diese Weise lassen sich konsistente Schätzwerte der Parameter a_i und b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ermitteln (siehe Abschnitt 2.3.2).

In den meisten Fällen wird jedoch versucht, ein zusätzliches Störmodell mit der Übertragungsfunktion $G_r(z)$ einzuführen, das die Korrelation des Gleichungsfehlers $e(k)$ mitzuerfassen erlaubt. Durch Filterung des Fehlersignals $e(k)$ mit Hilfe

eines geeignet gewählten $G_r(z)$ soll $e(k)$ in weißes Rauschen umgeformt werden, wobei die Tatsache berücksichtigt wird, daß sich jedes stochastische Rauschsignal durch geeignete Filterung auf ein weißes Rauschsignal zurückführen läßt. Durch diese zusätzliche Filterung erhält man aus Gl. (2.9) den erweiterten allgemeinen Modellansatz

$$E(z) = \frac{A(z^{-1})}{G_r(z)} Y(z) - \frac{B(z^{-1})}{G_r(z)} U(z) \quad (2.14a)$$

bzw.

$$G_r(z) E(z) = A(z^{-1})Y(z) - B(z^{-1})U(z) = V(z) \quad (2.14b)$$

(Bild 2.4), der für $G_r(z) = 1$ auch den Modellansatz der LS- und IV-Methode enthält.

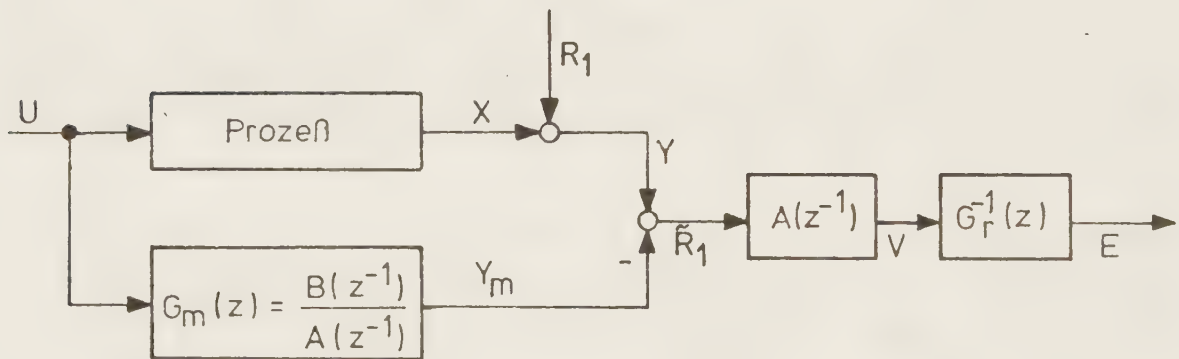


Bild 2.4: Erweitertes Modell zur Ermittlung des Gleichungsfehlers

Verfahren, die mit dieser erweiterten Struktur arbeiten, sind u.a. die in dieser Arbeit untersuchte 1., 2. und 3. erweiterte Matrizen-Methode (Abschnitt 2.3.1) und die rekursive Maximum Likelihood-Methode (Abschnitt 2.3.3).

Faßt man die gesamte bisherige, eher anschauliche Vorgehensweise zusammen, so kann folgende einheitliche Beschreibung der bei Parameterschätzverfahren verwendeten Modellstrukturen angegeben werden:

Genauso, wie man das zu identifizierende, stochastisch gestörte Regelsystem nach Bild 2.1 und Gl. (2.1) in einen deterministischen Prozeßteil mit dem zugehörigen Eingangssignal $u(k)$ und dem Ausgangssignal $x(k)$ und in einen diesem Nutzsignal additiv überlagerten Rauschanteil $r_1(k)$ aufspalten kann, läßt sich auch das gesamte Modell nach Bild 2.5 aufteilen in einen Modellteil $G_m(z)$ für den deterministischen Systemteil und einen weiteren Modellteil für das Rauschsignal $\tilde{r}_1(k)$.

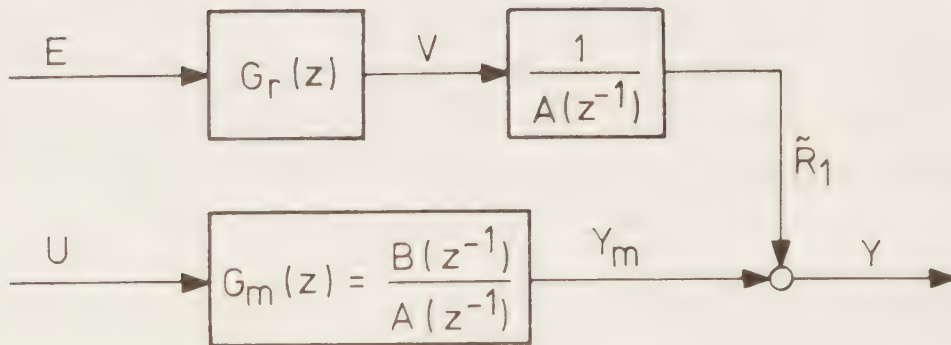


Bild 2.5: Allgemeiner Modellansatz für ein stochastisch gestörtes Regelsystem im Zusammenhang mit Parameterschätzverfahren

Dieser 2. Modellteil besteht einerseits aus dem Filter $A^{-1}(z^{-1})$, das eingeführt wurde, um ein lineares Schätzproblem zu erhalten, und das $\tilde{r}_1(k)$ auf das autokorrelierte Signal $v(k)$ zurückführt; andererseits enthält er das zusätzliche Störmodell mit der Übertragungsfunktion $G_r(z)$, das im Falle $G_r(z) \neq 1$ ein weißes Rauschsignal $e(k)$ gewährleisten soll.

Wie Tabelle 2.1 für die 6 untersuchten Parameterschätzverfahren zeigt, wird die umfassendste Darstellung von $G_r(z)$ durch die gebrochen rationale Übertragungsfunktion

$$G_r(z) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n}} \quad (2.15)$$

gegeben. Mit Gl. (2.14) erhält man damit den allgemeinen Modellansatz in der Form

$$A(z^{-1}) Y(z) - B(z^{-1}) U(z) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} E(z) \quad (2.16a)$$

mit

$$\frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} E(z) = V(z), \quad (2.16b)$$

aus der die übrigen Ansätze nach Tabelle 2.1 durch Reduktion der Anzahl der Filterpolynome $C(z^{-1})$ bzw. $D(z^{-1})$ abgeleitet werden können. Die zugehörige Differenzengleichung für einen beliebigen Zeitpunkt k ($k \geq n+1$) lautet damit schließlich

$$\begin{aligned} y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) &= \\ &= - \sum_{i=1}^n d_i v(k-i) + \sum_{i=1}^n c_i e(k-i) + e(k) \end{aligned} \quad (2.17a)$$

mit

$$v(k) = - \sum_{i=1}^n d_i v(k-i) + \sum_{i=1}^n c_i e(k-i) + e(k). \quad (2.17b)$$

+) Zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung wurde die Ordnung der Polynome C und D gleich der Modellordnung n gesetzt. Dies ist insofern berechtigt, als sich für diesen Fall auch die besten Schätzergebnisse eingestellt haben. Die entwickelten Prozeßrechnerprogramme erlauben jedoch auch eine Wahl, die unabhängig von der Modellordnung n ist.

Die Parameter dieses erweiterten Modells werden nun durch Minimierung einer quadratischen Funktion des Fehlers $e(k)$ bestimmt. Da sich die Vorgehensweise bei der numerischen Behandlung dieser Optimierungsaufgabe bei den einzelnen Verfahren z.T. unterscheidet, ist für die weitere Herleitung eine nach Verfahren getrennte Darstellung erforderlich. Lediglich die 1., 2. und 3. EM- sowie die LS-Methode können wegen übereinstimmender Numerik im folgenden Abschnitt unter dem Oberbegriff "erweiterte LS-Methoden" gemeinsam behandelt werden.

Parameterschätzmethode	Modellansatz	$G_r(z)$
RLS	$AY - BU = E$	1
IV		
1.EM	$AY - BU = E/D$	1/D
2.EM	$AY - BU = CE$	C
RML		
3.EM	$AY - BU = CE/D$	C/D

Tabelle 2.1: Modellansatz der untersuchten Parameterschätzverfahren

2.3 Untersuchte Parameterschätzverfahren

2.3.1 Erweiterte Least Squares-Methoden (RLS-, 1.-3.EM-Methode)

Geht man von dem allgemeinen Modellansatz nach Bild 2.5 bzw. Gl. (2.17a) aus und führt den Parametervektor

$$\begin{aligned}
 \underline{p}^T &= [a_1 \dots a_n | b_1 \dots b_n | c_1 \dots c_n | d_1 \dots d_n] = \\
 &= [\underline{p}_a^T | \underline{p}_b^T | \underline{p}_c^T | \underline{p}_d^T]
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

sowie den Datenvektor

$$\begin{aligned} \underline{m}^T(k) &= [-y(k-1) \dots -y(k-n) \mid u(k-1) \dots u(k-n) \mid \\ &\quad e(k-1) \dots e(k-n) \mid -v(k-1) \dots -v(k-n)] \\ &= [\underline{m}_y^T(k) \mid \underline{m}_u^T(k) \mid \underline{m}_e^T(k) \mid \underline{m}_v^T(k)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

ein, so ergibt sich Gl. (2.17a) in der Form

$$y(k) = \underline{m}^T(k) \underline{p} + e(k). \quad (2.20)$$

Für N aufeinanderfolgende Messungen $\{u(k), y(k)\}$ mit $k = n+1, \dots, n+N$ entspricht dies der vektoriellen Darstellung

$$\underline{y} = \underline{M} \underline{p} + \underline{e} \quad (2.21)$$

mit den Abkürzungen

$$\underline{y}^T = [y(n+1) \dots y(n+N)], \quad (2.22)$$

$$\underline{e}^T = [e(n+1) \dots e(n+N)] \quad (2.23)$$

und der Datenmatrix

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{m}^T(n+1) \\ \underline{m}^T(n+2) \\ \vdots \\ \underline{m}^T(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) & \dots -y(1) & \mid & u(n) & \dots u(1) & \mid & e(n) & \dots e(1) & \mid & -v(n) & \dots -v(1) \\ -y(n+1) & \dots -y(2) & \mid & u(n+1) & \dots u(2) & \mid & e(n+1) & \dots e(2) & \mid & -v(n+1) & \dots -v(2) \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\ -y(n+N-1) \dots -y(N) & \mid & u(n+N-1) \dots u(N) & \mid & e(n+N-1) \dots e(N) & \mid & -v(n+N-1) \dots -v(N) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Die Bedeutung der einzelnen Größen $\underline{p}^T$, $\underline{m}^T$ und $\underline{M}$ unterscheidet sich dabei für die unter "erweiterte Least Squares-Methoden" zusammengefaßten LS-, 1., 2. und 3. EM-Methoden in Abhängigkeit vom jeweils verwendeten Modellansatz (Tabelle 2.1)

und ist deshalb in Tabelle 2.2 noch einmal übersichtlich zusammengestellt.

Zur Ermittlung der Modellparameter wird nun auf der Grundlage des Fehlervektors $\underline{e}$ nach $N+n$ Messungen eine quadratische Fehlerfunktion

$$I_1(\underline{p}) = \frac{1}{2} \underline{e}^T \underline{e} = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{n+N} e^2(k) \quad (2.25)$$

definiert. Das Minimum von $I_1(\underline{p})$ erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (2.21) durch Nullsetzen der partiellen Ableitung von I_1 nach $\underline{p}$

$$\left. \frac{\partial I_1(\underline{p})}{\partial \underline{p}} \right|_{\underline{p}=\hat{\underline{p}}} = - \underline{M}^T \underline{y} + \underline{M}^T \underline{M} \hat{\underline{p}} = \underline{0}. \quad (2.26)$$

Durch Auflösen nach dem gesuchten Parameterschätzvektor $\hat{\underline{p}}$ erhält man daraus die direkte Lösungsgleichung der erweiterten LS-Methoden

$$\boxed{\hat{\underline{p}} = [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{y}.} \quad (2.27)$$

Sofern das Fehlersignal $e(k)$ ein $N(0, \sigma^2)$ -verteiltes weißes Rauschsignal darstellt und $u(k)$ eine genügende und fort-dauernde Erregung ("persistent excitation") des Prozesses gewährleistet, sind die auf diese Weise mit den erweiterten LS-Methoden geschätzten Parameter konsistent im quadratischen Mittel (siehe Anhang A).

Da in der Praxis die Modellstruktur der LS-Methode nach Bild 2.5 mit $G_r(z) = 1$ jedoch nicht ausreicht, das Störsignal $\tilde{r}_1(k)$ über ein Filter mit der Übertragungsfunktion $A^{-1}(z^{-1})$ auf weißes Rauschen $e(k)$ zurückzuführen, treten bei diesem Verfahren autokorrelierte Fehlersignale auf, die Schätzungen mit systematischem Fehler zur Folge haben. Dieser wird bei den übrigen erweiterten LS-Methoden dagegen durch eine zusätzliche Filterung des korrelierten Fehler-

signals und dessen dadurch bedingte Rückführung auf weißes Rauschen vermieden.

Zur direkten Parameterschätzung nach Gl. (2.27) müssen sämtliche Signalwerte in der Matrix $\underline{M}$ abgespeichert werden, bevor die Parameter in einem Zug berechnet werden können. Soll diese direkte Schätzung zusätzlich im on-line Betrieb eingesetzt werden, ist bei neu anfallenden Meßwerten jeweils eine Invertierung der Matrix $\underline{M}^T \underline{M}$ erforderlich, nachdem diese aufgrund der neuen Messungen aktualisiert worden ist. Dieser erhebliche numerische Aufwand sowie der große Speicherplatzbedarf lassen sich vermeiden, wenn die Schätzgleichungen in rekursiver Form vorliegen.

Bei der Ableitung eines Algorithmus zur rekursiven Parameterschätzung mit den erweiterten LS-Methoden geht man aus von der direkten Lösungsgleichung (2.27) bzw. der äquivalenten Summenschreibweise für k Messungen

$$\hat{\underline{p}}(k) = \underline{P}(k) \cdot \sum_{i=n+1}^k \underline{m}(i) y(i) \quad (2.28)$$

mit

$$\underline{P}(k) = \left[\sum_{i=n+1}^k \underline{m}(i) \underline{m}^T(i) \right]^{-1}. \quad (2.29)$$

Nach einigen Umformungen, die im Anhang B.1 beschrieben sind, erhält man daraus den folgenden Rekursivalgorithmus für die erweiterten LS-Methoden:

$$\hat{\underline{p}}(k+1) = \hat{\underline{p}}(k) + \underline{q}(k+1) \hat{\underline{e}}(k+1) \quad (2.30a)$$

$$\underline{q}(k+1) = \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) \left[1 + \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) \right]^{-1} \quad (2.30b)$$

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \quad (2.30c)$$

$$\hat{\underline{e}}(k+1) = y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \hat{\underline{p}}(k). \quad (2.30d)$$

Aus Gl. (2.30a) und Gl. (2.30d) geht ganz deutlich die Grundstruktur aller rekursiven Schätzverfahren hervor:

$$\begin{array}{l} \text{Neuer} \\ \text{Schätzwert} \end{array} = \begin{array}{l} \text{alter} \\ \text{Schätzwert} \end{array} + \begin{array}{l} \text{Korrektur-} \\ \text{faktor} \end{array} \cdot \left[\begin{array}{l} \text{neuer} \\ \text{Meßwert} \end{array} - \begin{array}{l} \text{vorhergesagter} \\ \text{Wert aufgrund} \\ \text{der Parameter} \\ \text{des letzten} \\ \text{Schrittes.} \end{array} \right]$$

$\hat{e}(k+1)$ ist dabei - diesem Klammerausdruck entsprechend - ein Vorhersagefehler, da er sich als Differenz zwischen dem Meßwert $y(k+1)$ und dessen Prädiktion

$$\hat{y}_m(k+1) = \hat{y}(k+1/k) = \underline{m}^T(k+1) \underline{\hat{p}}(k) \quad (2.31)$$

aufgrund der Parameter des letzten Schrittes ergibt (siehe auch Abschnitt 2.2).

Da der Klammerausdruck in Gl. (2.30b) ein Skalar ist, macht der Rekursivalgorithmus eine Matrizeninvertierung überflüssig. Zudem ist die Abspeicherung einer Datenmatrix nicht erforderlich, da neu anfallende Meßwerte sofort verarbeitet werden. Diesen ganz erheblichen Vorteilen stehen allerdings auch einige allen rekursiven Verfahren eigentümliche Nachteile gegenüber, die mit der Startphase des Rekursivalgorithmus zusammenhängen und die in einem speziellen Abschnitt noch eingehend behandelt werden (siehe Abschnitt 3.2).

Die angegebenen direkten bzw. rekursiven Versionen der Lösungsgleichung können für die LS-Methode unmittelbar angewendet werden. Bei den erweiterten Matrizen-Methoden enthält der Datenvektor $\underline{m}$ nach Gl. (2.19) und damit die Meßwertematrix $\underline{M}$ jedoch auch Werte der Fehler $e(k)$ und $v(k)$. Da diese aber in Wirklichkeit nicht bekannt sind, müssen dafür geeignete Näherungen ermittelt werden. Eine einfache Möglichkeit besteht darin, anstelle von $e(k)$ und $v(k)$ deren Schätzwerte

$$\hat{e}(k+1) = y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \underline{\hat{p}}(k) \quad (2.32)$$

und

$$\hat{v}(k+1) = y(k+1) - \underline{m}_{yu}^T(k+1) \cdot \underline{\hat{p}}_{ab}(k) \quad (2.33)$$

nach Gl. (2.17) bzw. Gl. (2.30d) in dem entsprechend modifizierten Datenvektor

$$\underline{m}^T(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) \dots -y(k-n) & u(k-1) \dots u(k-n) & \hat{e}(k-1) \dots \hat{e}(k-n), \\ & & -\hat{v}(k-1) \dots -\hat{v}(k-n) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

einzusetzen.

Der vollständige Rekursivalgorithmus der erweiterten LS-Methoden setzt sich somit aus den Gln. (2.30) und (2.33) zusammen, wobei $\underline{m}^T(k)$ nach Gl. (2.34) verwendet werden muß. Die genaue Bedeutung der einzelnen darin enthaltenen Größen für die unterschiedlichen Methoden ist in Tabelle 2.2 angegeben, wo noch einmal eine einheitliche und zusammenfassende Darstellung der untersuchten Algorithmen zu finden ist.

2.3.2 Hilfsvariablen-Methode (IV-Methode)

Während bei den erweiterten Matrizen-Methoden das Problem der korrelierten Gleichungsfehler durch deren Rückführung auf ein weißes Rauschsignal $e(k)$ über ein Filter $G_r(z)$ gelöst wird, geht man bei der IV-Methode von der dem Modellansatz nach Gl. (2.16) und Bild 2.5 für $G_r(z) = 1$ entsprechenden Beziehung

$$A(z^{-1}) Y(z) - B(z^{-1}) U(z) = E(z) \quad (2.35)$$

oder

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) = e(k) \quad (2.36)$$

aus, wobei keine speziellen Annahmen über den Gleichungsfehler $e(k)$ gemacht werden. Zur Ermittlung der Modellparameter wird Gl. (2.36) wiederum in der vektoriellen Darstellung

$$\underline{y} = \underline{M}\underline{p} + \underline{e} \quad (2.37)$$

nach Gl. (2.21) angeschrieben, wobei die Bedeutung der Größen $\underline{p}$ und $\underline{M}$ in Abhängigkeit vom gewählten Modellansatz zu berücksichtigen ist (siehe Tabelle 2.2). Auf der Grundlage des Fehlervektors $\underline{e}$ wird nun eine quadratische Fehlerfunktion

$$I_2(\underline{p}) = \frac{1}{2} \underline{e}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{e} \quad (2.38)$$

definiert. Dabei bezeichnet man

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \underline{w}^T(n+1) \\ \vdots \\ \underline{w}^T(n+N) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

als Hilfsvariablenmatrix, wenn folgende Beziehungen gelten:

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{W}^T \underline{M} \quad \text{regulär} \quad (2.40)$$

und

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{W}^T \underline{e} = \underline{0}. \quad (2.41)$$

Das Minimum von $I_2(\underline{p})$ erhält man schließlich unter Berücksichtigung von Gl. (2.37) durch Nullsetzen der partiellen Ableitung von I_2 nach $\underline{p}$

$$\left. \frac{\partial I_2(\underline{p})}{\partial \underline{p}} \right|_{\underline{p} = \hat{\underline{p}}} = - \underline{M}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{y} + \underline{M}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{M} \hat{\underline{p}} = \underline{0}. \quad (2.42)$$

Auflösen nach dem gesuchten Parameterschätzvektor $\hat{\underline{p}}$ liefert die Beziehung

$$\hat{\underline{p}} = [\underline{M}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{y}, \quad (2.43)$$

aus der sich unter Berücksichtigung von Gl. (2.40) für große N die direkte Lösungsgleichung der IV-Methode

$$\boxed{\hat{\underline{p}} = [\underline{W}^T \underline{M}]^{-1} \underline{W}^T \underline{y}} \quad (2.44)$$

ergibt.

Sofern die in den Gln. (2.40) und (2.41) angegebenen Bedingungen erfüllt werden, sind die mit der IV-Methode geschätzten Parameter konsistent (siehe Anhang A).

Analog zu Abschnitt 2.3.1 erhält man die rekursive Version der Schätzgleichung für die IV-Methode, indem man von der direkten Lösungsgleichung (2.44) bzw. der äquivalenten Summenschreibweise für k Messungen

$$\underline{\hat{p}}(k) = \underline{P}(k) \sum_{i=n+1}^k \underline{w}(i) \underline{y}(i) \quad (2.45)$$

mit

$$\underline{P}(k) = \left[\sum_{i=n+1}^k \underline{w}(i) \underline{m}^T(i) \right]^{-1} \quad (2.46)$$

und $\underline{m}$ nach Tabelle 2.2 ausgeht. Die entsprechende Vorgehensweise wie in Anhang B.2, wobei dort allerdings $\rho \equiv 1$ gesetzt werden muß, liefert den folgenden Rekursivalgorithmus für die IV-Methode

$$\underline{\hat{p}}(k+1) = \underline{\hat{p}}(k) + \underline{q}(k+1) \underline{\hat{e}}(k+1) \quad (2.47a)$$

$$\underline{q}(k+1) = \underline{P}(k) \underline{w}(k+1) [1 + \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{w}(k+1)]^{-1} \quad (2.47b)$$

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \quad (2.47c)$$

$$\underline{\hat{e}}(k+1) = \underline{y}(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \underline{\hat{p}}(k). \quad (2.47d)$$

Sowohl die Konvergenzgeschwindigkeit als auch die Effizienz der Schätzung hängen bei der IV-Methode in entscheidendem Maße von der Wahl der Hilfsvariablenmatrix $\underline{W}$ ab. Um die Bedingungen nach Gl. (2.40) und (2.41) zu erfüllen, müssen die Elemente von $\underline{W}$ so gewählt werden, daß sie stark mit den Nutzsignalanteilen in der Matrix $\underline{M}$, aber nicht mit den Anteilen des Störsignals korreliert sind. Die günstigste Konstellation liegt vor, wenn $\underline{W}$ die ungestörten Signale von $\underline{M}$, also die Nutzsignale, direkt enthält. Da jedoch das ungestörte Ausgangssignal x nicht meßbar ist, versucht man, Schätzwerte dieses Signals als Hilfsvariable y_H zu verwenden. Diese Hilfsvariablen, die in der Matrix $\underline{W}$ nach

$$\underline{w}^T(k) = [-y_H(k-1) \dots -y_H(k-n) \mid u(k-1) \dots u(k-n)] \quad (2.48)$$

angeordnet werden, erhält man bei der rekursiven Version der IV-Methode über die Beziehung

$$y_H(k) = \underline{w}^T(k) \underline{p}_H(k) \quad (2.49)$$

als Ausgang eines Hilfsmodells mit der Übertragungsfunktion $B_H(z^{-1})/A_H(z^{-1})$, das durch das Eingangssignal $u(k)$ angeregt wird (Bild 2.6).

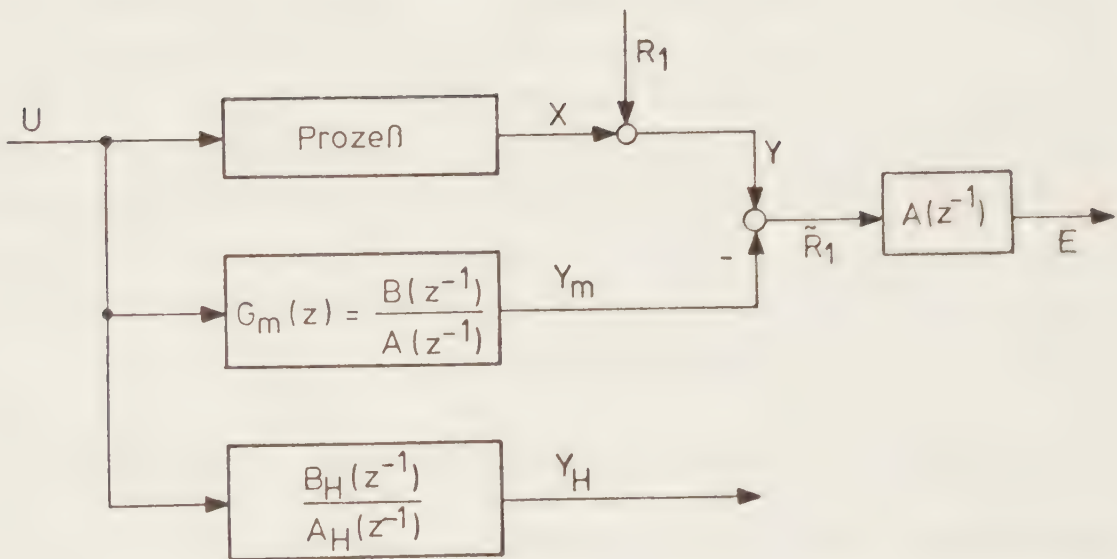


Bild 2.6: Modell für die rekursive Version der Hilfsvariablen-Methode

Dabei enthält $\underline{p}_H$ die Parameter des Hilfsmodells, die aus den geschätzten Parametern $\underline{\hat{\beta}}$ berechnet werden.

Da das Störsignal $r_1(k)$ jedoch die Ermittlung von $\underline{\hat{\beta}}(k)$ beeinflusst, sind die Hilfsvariablen mit dem Störsignal und damit auch dem Gleichungsfehler $e(k)$ korreliert. Da dies

wegen Gl. (2.41) zu einem systematischen Schätzfehler führt, wird von Wong und Polak [32] vorgeschlagen, eine Totzeit d zwischen den geschätzten Parametern $\hat{p}$ und den im Hilfsmodell eingestellten Parametern p_H einzuführen, wobei d so gewählt wird, daß $e(k+d)$ unabhängig ist von $e(k)$. Wird zusätzlich ein diskretes Tiefpaßfilter

$$\underline{p}_H(k) = (1-\gamma) \underline{p}_H(k-1) + \gamma \underline{\hat{p}}(k-d) \quad (2.50)$$

verwendet [35], dann muß die Wahl von d weniger genau sein und die Parameterschätzwerte werden geglättet, so daß schnelle Parameteränderungen des Hilfsmodells vermieden werden. γ wird dabei nach [20] gewählt.

Die Effizienz der Schätzung mit der rekursiven Version der IV-Methode hängt somit in erster Linie von einem geeigneten Hilfsmodell ab, dessen Parameter so eingestellt werden müssen, daß eine Korrelation zwischen der Hilfsvariablen $y_H(k)$ und dem Gleichungsfehler $e(k)$ verhindert wird.

Der vollständige Rekursivalgorithmus der IV-Methode setzt sich damit aus den Gln. (2.47), (2.49) und (2.50) zusammen, wobei $\underline{w}^T(k)$ nach Gl. (2.48) verwendet werden muß. Die genaue Bedeutung der einzelnen darin enthaltenen Größen ist noch einmal in Tabelle 2.2 angegeben.

2.3.3 Rekursive Maximum Likelihood-Methode (RML-Methode)

Wie bei den erweiterten LS-Methoden nach Abschnitt 2.3.1 wird bei der RML-Methode versucht, das Problem der korrelierten Gleichungsfehler durch deren Filterung und Rückführung auf ein weißes Rauschsignal $e(k)$ zu lösen, wobei speziell

$$G_r(z) = C(z^{-1}) \quad (2.51)$$

gesetzt wird. Der verwendete Modellansatz ergibt sich damit nach Gl. (2.16) und Bild 2.5 als

$$A(z^{-1}) Y(z) - B(z^{-1}) U(z) = C(z^{-1}) E(z) \quad (2.52)$$

bzw.

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) = \sum_{i=1}^n c_i e(k-i) + e(k). \quad (2.53)$$

Während nun bei den übrigen Methoden zur Ermittlung der rekursiven Version der Schätzgleichungen zunächst die direkte Lösungsgleichung aufgestellt werden mußte, kann die RML-Methode unmittelbar als rekursives Verfahren zur Bestimmung des Minimums der Fehlerfunktion

$$I_1(\underline{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^k e^2(i) = I_1(k, \underline{p}) \quad (2.54)$$

auf der Grundlage von k Messungen mit $e(k)$ nach Gl. (2.53) hergeleitet werden.

Nimmt man an, daß $I_1(k, \underline{p})$ bei $\hat{\underline{p}}(k)$ ein Minimum besitzt, so wird zur Bestimmung des Minimums $\hat{\underline{p}}(k+1)$ der Fehlerfunktion $I_1(k+1, \underline{p})$ nach $k + 1$ Messungen eine Taylor-Entwicklung

$$I_1(k+1, \underline{p}) \approx I_1[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] + \underline{I}_{1\underline{p}}^T[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] \cdot [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)] + \frac{1}{2} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)]^T \cdot \underline{I}_{1\underline{pp}}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] \cdot [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)] \quad (2.55)$$

von $I_1(k+1, \underline{p})$ um $\hat{\underline{p}}(k)$ vorgenommen, die nach dem dritten Glied abgebrochen wird. Dabei stellen $\underline{I}_{1\underline{p}}$ den Gradienten und $\underline{I}_{1\underline{pp}}$ die Hesse-Matrix der Fehlerfunktion I_1 dar, während $\underline{p}$ bzw. $\hat{\underline{p}}$ in Abhängigkeit vom gewählten Modellansatz nach Tabelle 2.2 anzusetzen ist.

Das Minimum von $I_1(k+1, \underline{p})$ erhält man aus Gl. (2.55) durch Nullsetzen der partiellen Ableitung von I_1 nach $\underline{p}$

$$\left. \frac{\partial I_1(k+1, \underline{p})}{\partial \underline{p}} \right|_{\underline{p}=\hat{\underline{p}}(k+1)} = \underline{I}_{1\underline{p}}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] + \underline{I}_{1\underline{pp}}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] \cdot [\hat{\underline{p}}(k+1) - \hat{\underline{p}}(k)] = \underline{0}. \quad (2.56)$$

Auflösen nach dem gesuchten Parameterschätzvektor $\hat{\underline{p}}(k+1)$ liefert schließlich die Rekursivbeziehung

$$\hat{\underline{p}}(k+1) = \hat{\underline{p}}(k) - \underline{I}_{1\underline{pp}}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)]^{-1} \cdot \underline{I}_{1\underline{p}}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)]. \quad (2.57)$$

Die zur Vervollständigung dieser Schätzgleichung notwendigen rekursiven Beziehungen für die Fehlerfunktion

$\underline{I}_1(k+1, \underline{p})$ und deren Ableitungen erhält man aus Gl. (2.54):

$$\underline{I}_1(k+1, \underline{p}) = \underline{I}_1(k, \underline{p}) + \frac{1}{2} e^2(k+1, \underline{p}) \quad (2.58)$$

$$\underline{I}_{1\underline{p}}(k+1, \underline{p}) = \underline{I}_{1\underline{p}}(k, \underline{p}) + e(k+1, \underline{p}) \underline{e}_{\underline{p}}(k+1, \underline{p}) \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1\underline{pp}}(k+1, \underline{p}) &= \underline{I}_{1\underline{pp}}(k, \underline{p}) + \underline{e}_{\underline{p}}(k+1, \underline{p}) \underline{e}_{\underline{p}}^T(k+1, \underline{p}) + \\ &+ e(k+1, \underline{p}) \underline{e}_{\underline{pp}}(k+1, \underline{p}). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Führt man zur Vereinfachung noch die Näherungen

$$\underline{I}_{1\underline{p}}[k, \hat{\underline{p}}(k)] = \underline{0}, \quad (2.61)$$

$$\hat{e}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] \underline{\hat{e}}_{\underline{pp}}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] = \underline{0} \quad (2.62)$$

und

$$\underline{I}_{1\underline{pp}}[k, \hat{\underline{p}}(k)] = \underline{I}_{1\underline{pp}}[k, \hat{\underline{p}}(k-1)] \quad (2.63)$$

ein, so erhält man schließlich aus den Gln. (2.59) und (2.60) die Beziehungen

$$\underline{I}_{1\underline{p}}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] = \hat{e}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] \underline{\hat{e}}_{\underline{p}}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] \quad (2.64)$$

und

$$\underline{I}_{1\underline{pp}}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] = \underline{I}_{1\underline{pp}}[k, \hat{\underline{p}}(k-1)] + \underline{\hat{e}}_{\underline{p}}[k+1, \hat{\underline{p}}(k)] \underline{\hat{e}}_{\underline{p}}^T[k+1, \hat{\underline{p}}(k)], \quad (2.65)$$

die aufgrund der neuen Bezeichnungen

$$\underline{P}(k) = \underline{I}_{1pp}[k, \underline{\hat{p}}(k-1)]^{-1}, \quad (2.66)$$

$$\underline{m}(k) = -\underline{\hat{e}}_{\underline{p}}[k, \underline{\hat{p}}(k-1)] \quad (2.67)$$

und

$$\hat{e}(k) = \hat{e}[k, \underline{\hat{p}}(k-1)] \quad (2.68)$$

mit Gl. (2.57) und Gl. (2.64) für den gesuchten Parametervektor den Schätzwert

$$\underline{\hat{p}}(k+1) = \underline{\hat{p}}(k) + \underline{P}(k+1) \hat{e}(k+1) \underline{m}(k+1) \quad (2.69)$$

und mit Gl. (2.65) die Beziehung

$$\underline{P}(k+1)^{-1} = \underline{P}(k)^{-1} + \underline{m}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \quad (2.70)$$

liefern. Daraus ergibt sich nach Anhang B.1, Gln. (B.5) und (B.4), die Rekursivbeziehung

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \quad (2.71c)$$

mit dem Korrekturfaktor

$$\underline{q}(k+1) = \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) [1 + \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{m}(k+1)]^{-1} \quad (2.71b)$$

und aus Gl. (2.69) mit

$$\underline{P}(k+1) \underline{m}(k+1) = \underline{q}(k+1) \quad (2.72)$$

nach Gl. (2.71b) folgende endgültige Beziehung für den Parameterschätzvektor

$$\underline{\hat{p}}(k+1) = \underline{\hat{p}}(k) + \underline{q}(k+1) \hat{e}(k+1). \quad (2.71a)$$

Als Rekursivbeziehung für den Fehler $\hat{e}$, der in Wirklichkeit nicht bekannt ist, verwendet man dabei wie bei der

2. EM-Methode, die denselben Modellansatz besitzt, die aus Gl. (2.53) abgeleitete Vorschrift

$$\hat{e}(k+1) = y(k+1) - \underline{m}_{yu}^T(k+1) \underline{\hat{p}}(k). \quad (2.71d)$$

Der Vektor $\underline{m}$ enthält nach Gl. (2.67) Ableitungen von e nach $\underline{p}$. Diese werden nach Gl. (2.52) entsprechend dem Modellansatz der RML-Methode im z -Bereich durch

$$C(z^{-1}) \frac{\partial E(z)}{\partial a_i} = z^{-i} Y(z), \quad (2.73)$$

$$C(z^{-1}) \frac{\partial E(z)}{\partial b_i} = -z^{-i} U(z) \quad (2.74)$$

und

$$C(z^{-1}) \frac{\partial E(z)}{\partial c_i} = -z^{-i} E(z) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.75)$$

definiert. Nach Rücktransformation in den Zeitbereich ergeben sich für $\underline{p} = \underline{\hat{p}}(k)$ diese Beziehungen unter Berücksichtigung von Gl. (2.67) in der rekursiven Form

$$\underline{m}(k+1) = \begin{bmatrix} -\hat{c}_1(k) \dots -\hat{c}_n(k) & & & \\ 1 & & 0 & \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix} \underline{m}(k) + \begin{bmatrix} -y(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{e}(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

(2.76)

die in Anhang C ausführlich hergeleitet wird.

Der vollständige Rekursivalgorithmus der RML-Methode ist somit durch die Gln. (2.71) und (2.76) definiert, wobei die in Tabelle 2.2 nochmals angegebene, genaue Bedeutung der einzelnen darin enthaltenen Größen berücksichtigt werden muß.

2.4 Einheitliche Darstellung der rekursiven Schätzgleichungen

Die starke Ähnlichkeit der in den vorangegangenen Abschnitten hergeleiteten rekursiven Schätzgleichungen für die untersuchten Parameterschätzverfahren gibt dazu Anlaß, eine einheitliche Darstellung in der Form

$$\underline{\hat{p}}(k+1) = \underline{\hat{p}}(k) + \underline{q}(k+1) \underline{\hat{e}}(k+1) \quad (2.77a)$$

$$\underline{q}(k+1) = \underline{P}(k) \underline{w}(k+1) [1 + \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{w}(k+1)]^{-1} \quad (2.77b)$$

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \quad (2.77c)$$

anzugeben, die die formale Übereinstimmung der Rekursivalgorithmien deutlich zum Ausdruck bringt. Die jeweilige Bedeutung sowie die Rechenvorschriften für die einzelnen darin enthaltenen Größen sind in Tabelle 2.2 für die untersuchten sechs Parameterschätzverfahren im einzelnen angegeben.

Ein Problem, das bei allen rekursiven Parameterschätzverfahren auftritt und das bei der Beschreibung der erweiterten LS-Methoden kurz angedeutet wurde, hängt mit dem Start dieser rekursiven Algorithmen zusammen. Wie aus Gl. (2.77) und Tabelle 2.2 hervorgeht, ist es dazu notwendig, Anfangswerte vor allem für $\underline{\hat{p}}$ und $\underline{P}$ vorzugeben (sowie für $\underline{\hat{e}}$ und $\underline{\hat{v}}$ bei den 1., 2. und 3. EM-Methoden, y_H bei der IV-Methode und $\underline{\hat{e}}$ bei der RML-Methode, die allerdings keinen so großen Einfluß auf die Konvergenz haben).

Mod. Code	Ausatz f. die $G_F(z)$	$\underline{p}$	$\underline{w}(k)$	$\underline{m}(k)$	$\underline{\theta}(k)$	$\phi(k)$	Ausatz f. die $G_U(z)$
MLL	1	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \\ \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n \end{bmatrix}^T$	$\underline{w}(k) = \underline{m}(k)$	$\underline{m}(k) =$ $[-y(k-1) \dots -y(k-n) \mid u(k-1) \dots u(k-n)]^T$	$\underline{\theta}(k) = y(k) - \underline{m}^T(k) \underline{\hat{\theta}}(k-1)$	-	$\underline{\hat{\theta}}, \underline{p}$
1. EM	$\frac{1}{D(z^{-1})}$	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \\ \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n \\ \hat{c}_1 \dots \hat{c}_n \end{bmatrix}^T$	$\underline{w}(k) = \underline{m}(k)$	$\underline{m}(k) =$ $[-y(k-1) \dots -y(k-n) \mid u(k-1) \dots u(k-n) \mid$ $- \phi(k-1) \dots - \phi(k-n)]^T$	$\underline{\theta}(k) = y(k) - \underline{m}^T(k) \underline{\hat{\theta}}(k-1)$	$\phi(k) = y(k) - \underline{m}^T(k) \underline{\hat{\theta}}(k) \underline{\hat{p}}(k-1)$	$\underline{\hat{\theta}}, \underline{p}, \phi$
2. EM	$C(z^{-1})$	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \\ \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n \\ \hat{c}_1 \dots \hat{c}_n \end{bmatrix}^T$	$\underline{w}(k) = \underline{m}(k)$	$\underline{m}(k) =$ $[-y(k-1) \dots -y(k-n) \mid u(k-1) \dots u(k-n) \mid$ $\phi(k-1) \dots \phi(k-n)]^T$	$\underline{\theta}(k) = y(k) - \underline{m}^T(k) \underline{\hat{\theta}}(k-1)$	-	$\underline{\hat{\theta}}, \underline{p}, \phi$
3. EM	$\frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}$	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \\ \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n \\ \hat{c}_1 \dots \hat{c}_n \end{bmatrix}^T$	$\underline{w}(k) = \underline{m}(k)$	$\underline{m}(k) =$ $[-y(k-1) \dots -y(k-n) \mid u(k-1) \dots u(k-n) \mid$ $\phi(k-1) \dots \phi(k-n) \mid - \phi(k-1) \dots - \phi(k-n)]^T$	$\underline{\theta}(k) = y(k) - \underline{m}^T(k) \underline{\hat{\theta}}(k-1)$	$\phi(k) = y(k) - \underline{m}^T(k) \underline{\hat{\theta}}(k) \underline{\hat{p}}(k-1)$	$\underline{\hat{\theta}}, \underline{p}, \phi, \phi$
IV	1	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \\ \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n \end{bmatrix}^T$	$\underline{w}(k) = [-y_H(k-1) \dots -y_H(k-n) \mid u(k-1) \dots u(k-n)]^T$ $y_H(k) = \underline{w}^T(k) \underline{P}_H(k)$ $\underline{P}_H(k)$ nach Gl. (2.50)	$\underline{m}(k) =$ $[-y(k-1) \dots -y(k-n) \mid u(k-1) \dots u(k-n)]^T$	$\underline{\theta}(k) = y(k) - \underline{m}^T(k) \underline{\hat{\theta}}(k-1)$	-	$\underline{\hat{\theta}}, \underline{p}, y_H$
RML	$C(z^{-1})$	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \\ \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n \\ \hat{c}_1 \dots \hat{c}_n \end{bmatrix}^T$	$\underline{w}(k) = \underline{m}(k)$	$\underline{m}(k)$ siehe Gl. (2.76)	$\underline{\theta}(k) = y(k) - \underline{m}^T(k) \underline{\hat{\theta}}(k-1)$	-	$\underline{\hat{\theta}}, \underline{p}, \phi$

Tabelle 2.2: Interpretation der einzelnen Größen in der einheitlichen Darstellung der Rekursivbeziehungen

Da i.a. keine a priori-Werte bekannt sind, müssen die Startwerte auf andere Weise beschafft werden. Es gibt dazu folgende Möglichkeiten:

- a) Man rechnet zu Beginn mit dem direkten Algorithmus der LS-Methode und erhält so $\hat{\underline{p}}_{ab}(0)$ und die zugehörige Matrix $\underline{P}(0)$, während die übrigen Startwerte gleich Null gesetzt werden.
- b) Man nimmt geeignete Werte für $\hat{\underline{p}}(0)$ und $\underline{P}(0)$ an, setzt die übrigen Startwerte gleich Null und verwendet von Anfang an den rekursiven Algorithmus.

Verschiedene Teilaspekte zu diesem Problemkreis, der bei jeder Schätzung mit rekursiven Parameterschätzverfahren beachtet werden muß, werden im folgenden Abschnitt nach einer Beschreibung der für den Einsatz der Verfahren verwendeten Testprozesse eingehend untersucht.

3. ERPROBUNG AN SYSTEMEN MIT KONSTANTEN PARAMETERN IM OFFENEN REGELKREIS

=====

3.1 Testprozesse und Testbedingungen

Zum Test der in Abschnitt 2 beschriebenen rekursiven Parameterschätzverfahren wurden 2 lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme herangezogen, die auf der Rechenanlage Telefunken RA 800 H analog simuliert wurden, um reale Arbeitsbedingungen infolge der bei der Datenerfassung notwendigen A/D-Wandlung zu erhalten.

Mit Prozeß 1 wird ein sprungfähiges, aperiodisches System 2. Ordnung mit der kontinuierlichen Übertragungsfunktion

$$G_{m1}(s) = \frac{1 + 0,2s + 0,01s^2}{1 + 4,5s + s^2} \quad (3.1a)$$

oder

$$G_{m1}(s) = 0,01 \frac{(s + 10)^2}{(s + 4,2656)(s + 0,2344)} \quad (3.1b)$$

bezeichnet, das sich durch einen Pol in der Nähe der Stabilitätsgrenze auszeichnet (Bild 3.1) [10, 18]. Unter Berücksichtigung eines Haltegliedes 0-ter Ordnung führt die z-Transformation von Gl. (3.1) bei einer Abtastzeit von $T = 0,15s$ auf die äquivalente z-Übertragungsfunktion

$$G_{m1}(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{0,01 + 0,0109z^{-1} - 0,0046z^{-2}}{1 - 1,4943z^{-1} + 0,5099z^{-2}} \quad (3.2a)$$

oder entsprechend Bild 3.1

$$G_{m1}(z) = 0,01 \frac{(z - 0,3251)(z + 1,4151)}{(z - 0,967)(z - 0,5273)} \quad (3.2b)$$

Die zugehörige Übergangsfunktion zeigt Bild 3.2.

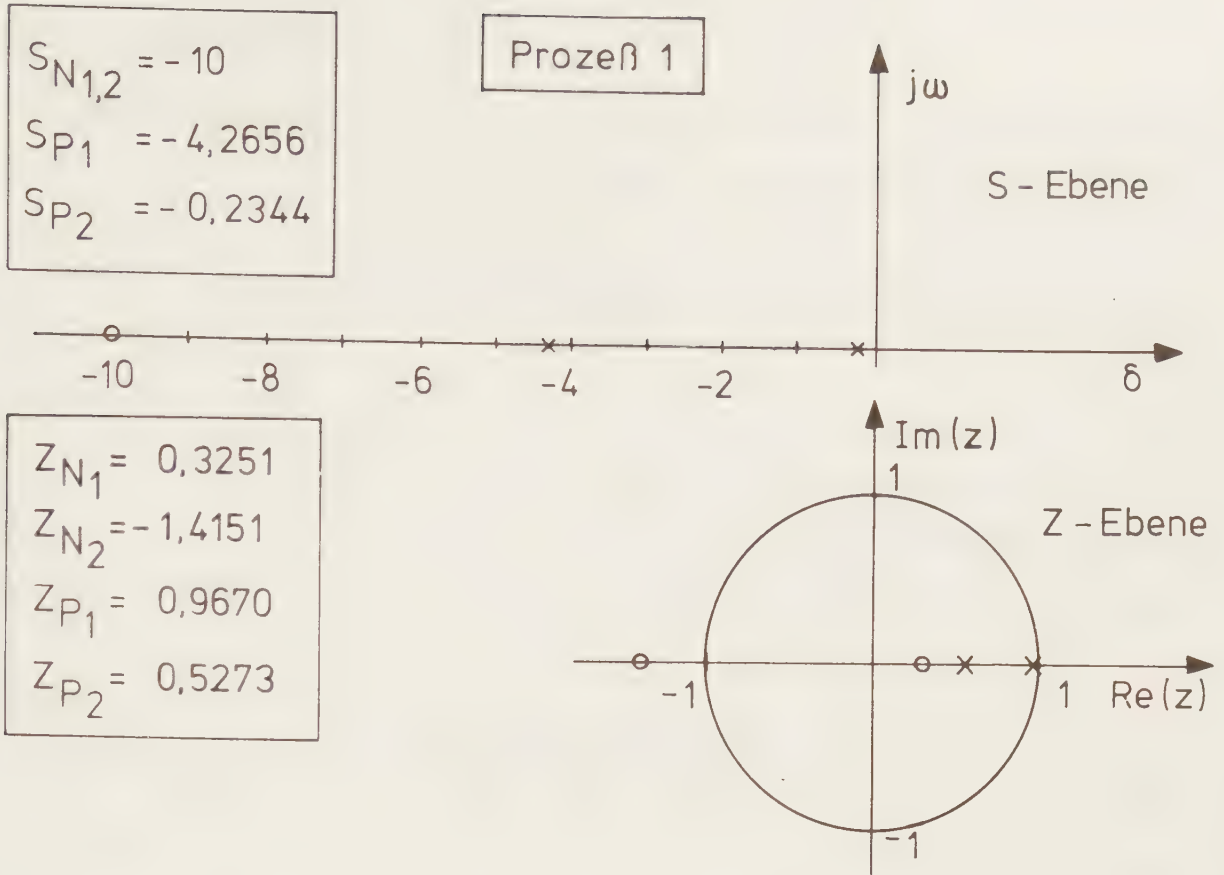


Bild 3.1: Pol-Nullstellenverteilung von Prozeß 1 ($T = 0,15s$)

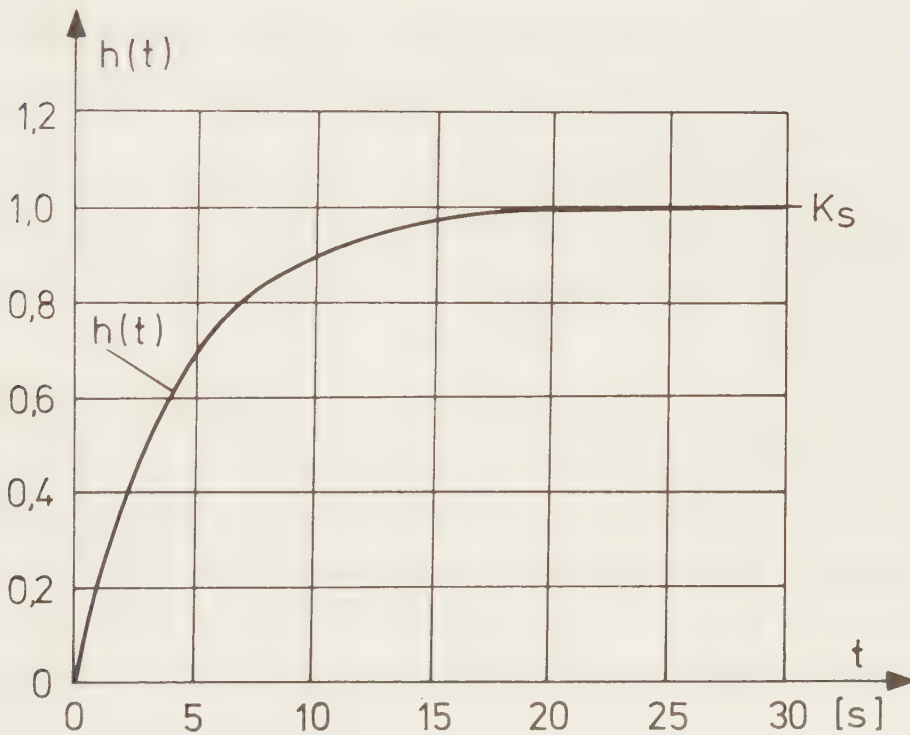


Bild 3.2: Übergangsfunktion von Prozeß 1

Prozeß 2 ist ein Verzögerungsglied 3. Ordnung mit der kontinuierlichen Übertragungsfunktion

$$G_{m2}(s) = \frac{1}{(1+3s)^2(1+s)} = \frac{0,1111}{(s+0,3333)(s+0,3333)(s+1)} . \quad (3.3)$$

Mit $T = 0,5s$ ergibt die z -Transformation von Gl. (3.3) unter Berücksichtigung eines Haltegliedres 0-ter Ordnung die zugehörige diskrete Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G_{m2}(z) &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} = \\ &= \frac{0,0019z^{-1} + 0,0061z^{-2} + 0,0012z^{-3}}{1 - 2,299z^{-1} + 1,743z^{-2} - 0,435z^{-3}} \end{aligned} \quad (3.4a)$$

oder auch

$$G_{m2}(z) = 0,0019 \frac{(z+0,2105)(z+3)}{(z-0,8817)(z-0,8024)(z-0,6149)} . \quad (3.4b)$$

Für Prozeß 2 ergibt sich damit eine Pol-Nullstellenverteilung in der s - und z -Ebene nach Bild 3.3 und eine Übergangsfunktion gemäß Bild 3.4.

Die Übertragungsfunktionen $G_{mi}(z)$ ($i=1,2$) beider Testprozesse entsprechen dabei jeweils dem deterministischen Teil des in Bild 2.1 bzw. 2.5 dargestellten stochastisch gestörten Gesamtsystems.

Als Eingangssignal u wurde für beide Prozesse ein binäres Pseudo-Rauschsignal (PRBS) mit unterschiedlichen Impulszahlen N_u (15, 31 und 63) verwendet, das sich leicht mit Hilfe rückgekoppelter Schieberegister erzeugen läßt [18]. Als Taktzeit dieses Testsignals wurde dabei $\Delta t_u = 1s$ (Prozeß 1) bzw. $2s$ (Prozeß 2), als maximale Amplitude $u_{\max} = 1V$ gewählt. Das Rauschsignal r_1 (siehe Bild 2.1) wurde einem Rauschgenerator entnommen, der zunächst ebenfalls ein binäres Zu-

Prozeß 2

$$s_{p_1} = -0,3333$$

$$s_{p_2} = -0,3333$$

$$s_{p_3} = -1,0$$

$$z_{N_1} = -0,2105$$

$$z_{N_2} = -3,0$$

$$z_{p_1} = 0,8817$$

$$z_{p_2} = 0,8024$$

$$z_{p_3} = 0,6149$$

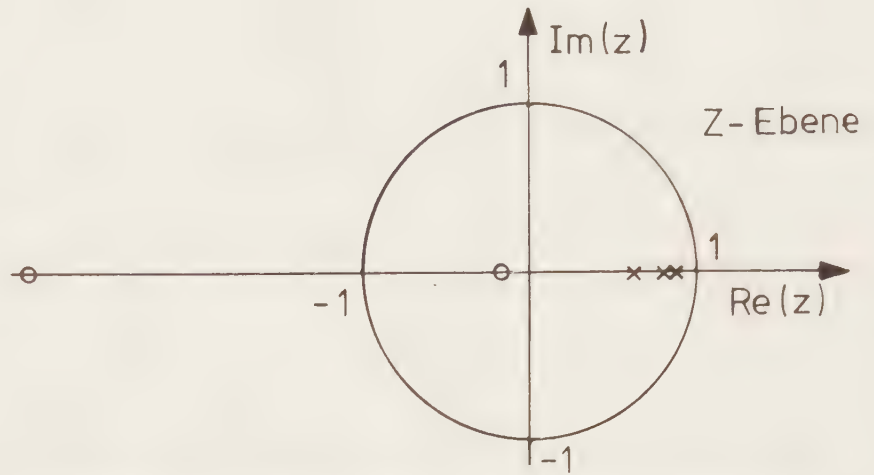
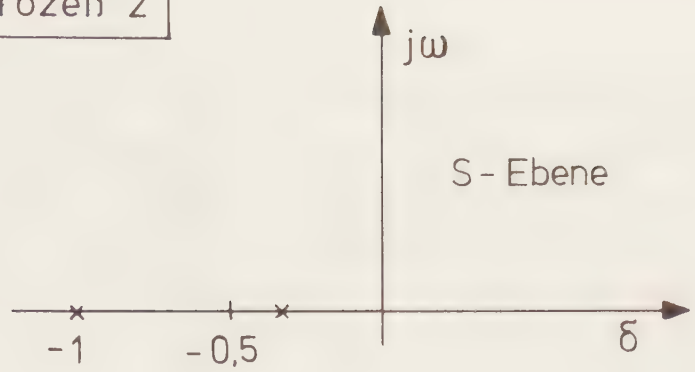


Bild 3.3: Pol-Nullstellenverteilung von Prozeß 2 ($T = 0,5s$)

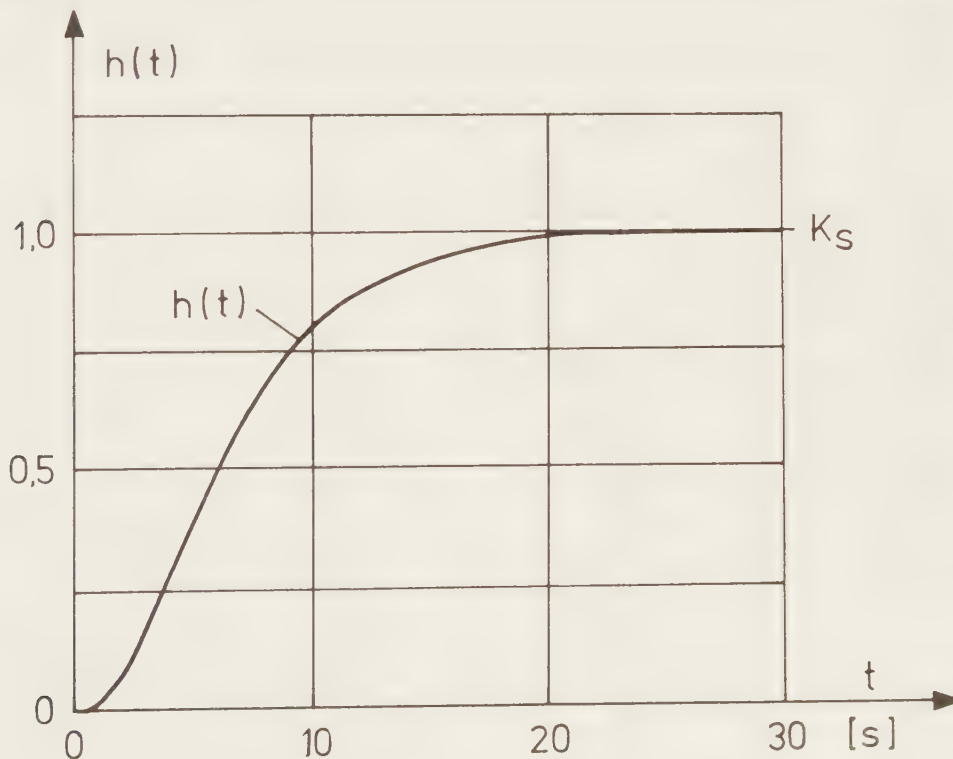


Bild 3.4: Übergangsfunktion von Prozeß 2

fallssignal liefert. Für die Simulation wurde dieses so gefiltert, daß das autokorrelierte Rauschsignal r_1 eine $(0, \lambda_{r1})$ -Normalverteilung besaß. Zur Ermittlung des Einflusses dieser Störungen auf die mit den untersuchten Verfahren erzielten Schätzergebnisse wurde die Standardabweichung λ_{r1} des Rauschsignals und damit auch der Störpegel [18]

$$\lambda_s = \lambda_{r1}/u_{\max} \quad (3.5)$$

nach Tabelle 3.1 sehr feinstufig variiert.

Um auch das Verhalten der Verfahren bei unterschiedlichen niederfrequenten Störungen untersuchen zu können, wurde dem Ausgangssignal zusätzlich eine lineare Drift überlagert, deren Steigung d_1 [V/s], festgelegt durch den Driftpegel

$$d_{1N} = \frac{d_1 \cdot 100s}{u_{\max}} \quad (3.6)$$

[40], innerhalb der angegebenen Bereiche (Tabelle 3.1) ebenfalls in kleinen Schritten verändert wurde.

Die im Verlauf der Untersuchungen teilweise auftretenden extremen Betriebsbedingungen sind in Bild 3.5 anschaulich dargestellt.

Nr.	Betriebsbedingungen	Einstellbereich
I	System ohne Rauschen und Drift	$\lambda_s = 0$ und $d_{1N} = 0$
II	System mit Rauschen	$0 \leq \lambda_s \leq 0,2$
III	System mit Drift	$0 \leq d_{1N} \leq 2$
IV	System mit Rauschen und Drift	$0 \leq \lambda_s \leq 0,2$ und $0 \leq d_{1N} \leq 2$

Tabelle 3.1: Betriebsbedingungen der untersuchten Systeme

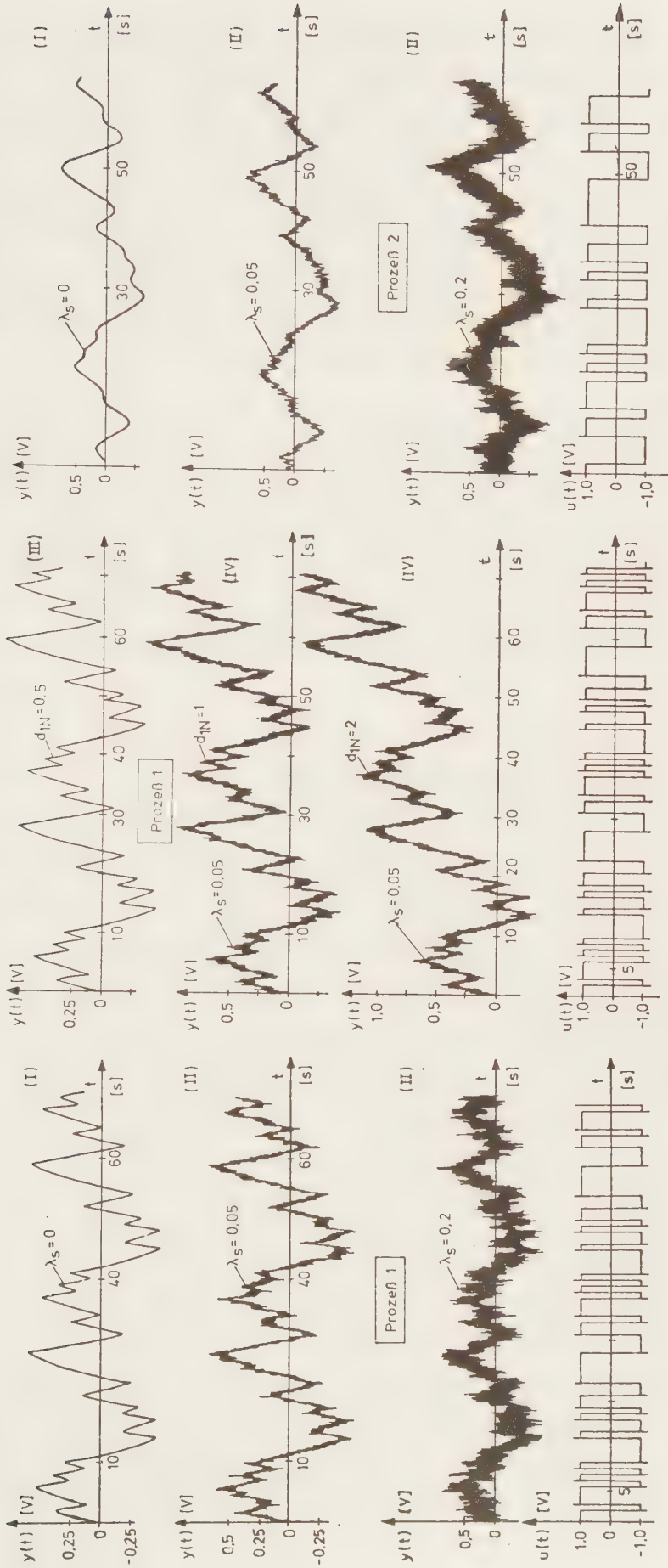


Bild 3.5: Betriebsbedingungen der untersuchten Regelsysteme (I System ohne Rauschen und Drift, II System mit Rauschen, III System mit Drift, IV System mit Rauschen und Drift; $N_u = 31$, $\Delta t_u = 1$ s bei Prozeß 1; $N_u = 31$, $\Delta t_u = 2$ s bei Prozeß 2)

Sämtliche Ergebnisse wurden bei direkter Kopplung eines Prozeßrechensystems (HP 2100A) mit dem als Simulator verwendeten Analogrechner (RA 800H) im on-line Betrieb erzielt. Dabei wurden die Parameter jeweils für Modelle unterschiedlicher Ordnung n berechnet. Die Anwendung verschiedener Strukturprüfverfahren [18, 41] ergab jedoch bei allen Parameterschätzverfahren die exakten Ordnungen 2 oder 3 der untersuchten Systeme. Die Ergebnisse werden deshalb im folgenden nur für die Modellordnungen $n = 2$ (Prozeß 1) bzw. $n = 3$ (Prozeß 2) dargestellt.

Die Beurteilung dieser Ergebnisse erfolgt dabei in erster Linie anhand der für die Modellparameter, den Verstärkungsfaktor bzw. die Übergangsfunktion erhaltenen Schätzwerte $\hat{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\hat{K}_s$ und $\hat{h}_m$, die aus einer Mittelung über 6 bis 10 Identifikationsläufe gewonnen wurden, um den Einfluß der jeweiligen Augenblickswerte des Störsignals möglichst weitgehend zu eliminieren.

3.2 Maßnahmen zur Konvergenzverbesserung

Bevor in den folgenden Abschnitten ein Vergleich der verschiedenen rekursiven Parameterschätzverfahren durchgeführt wird, muß zunächst über einige Maßnahmen gesprochen werden, die eine Verbesserung der Konvergenz, vor allem zu Beginn einer Schätzung ermöglichen und dadurch eine beträchtliche Erhöhung der Leistungsfähigkeit der eingesetzten Verfahren zur Folge haben. Wie in Abschnitt 2.4 bereits kurz angedeutet wurde, gibt es verschiedene Möglichkeiten zur Wahl geeigneter Anfangswerte für die rekursiven Schätzalgorithmen:

So wird einerseits als Startverfahren die direkte Version der LS-Methode eingesetzt; sehr oft wird statt des direkten auch der rekursive LS-Algorithmus verwendet, für dessen Start jedoch wiederum Anfangswerte, allerdings in wesentlich geringerer Zahl als bei den übrigen Rekursivverfahren, anzugeben sind. Da die RLS-Methode erfahrungsgemäß relativ unempfindlich gegenüber ungünstig gewählten Startparametern

ist, erscheint diese Vorgehensweise jedoch als recht sinnvoll, zumal der beim direkten LS-Algorithmus als Startverfahren erforderliche umfangreiche Rechen- und Programmieraufwand vermieden werden kann.

Die 2. Möglichkeit besteht im Einsatz des gewünschten Rekursivalgorithmus bereits vom Beginn der Schätzung an. In diesem Fall müssen ebenfalls Annahmen über die erforderlichen Anfangswerte des betreffenden Verfahrens getroffen werden.

In Bild 3.6 werden beide Möglichkeiten am Beispiel der IV-Methode bei der Identifikation von Prozeß 1 miteinander verglichen. Für die verwendeten RLS- bzw. IV-Rekursivalgorithmen wurden dabei nach Vorschlägen von Lee [70] und Göhring [18] die Startwerte $\underline{p}(0) = \alpha \underline{I}$ mit $\alpha = 10^4$ sowie

$$\underline{\hat{p}}(0) = \underline{0} \quad (\text{Bild 3.6a})$$

bzw.

$$\underline{\hat{p}}(0) \neq \underline{0} \text{ mit } \hat{a}_1(0) = -2 \text{ und } \hat{a}_2(0) = 1 \quad (\text{Bild 3.6b})$$

gewählt. Aus Bild 3.6 lassen sich zunächst folgende Ergebnisse dieses Vergleichs ablesen:

1. Der Einsatz der RLS-Methode als Startverfahren (RLS $\rightarrow$ IV) ergibt für beide Anfangswerte des Parametervektors eine Verbesserung gegenüber der einfachen IV-Methode (IV).
2. Die Verwendung von $\underline{\hat{p}}(0) \neq \underline{0}$ als Startparameter liefert bessere Schätzergebnisse als $\underline{\hat{p}}(0) = \underline{0}$.

Insgesamt sind die auf diese Weise erzielten Resultate jedoch noch keineswegs zufriedenstellend. Der Grund dafür hängt in erster Linie mit divergierenden Schätzungen zusammen, die vor allem bei IV auftreten und sich stark auf die durch Mittelung gewonnenen Identifikationsergebnisse auswirken.

Um Maßnahmen zur Verbesserung dieser Ergebnisse ergreifen zu können, muß berücksichtigt werden, daß die Matrix $\underline{P}$ einen ganz wesentlichen Einfluß auf die Konvergenz der Schätzwerte

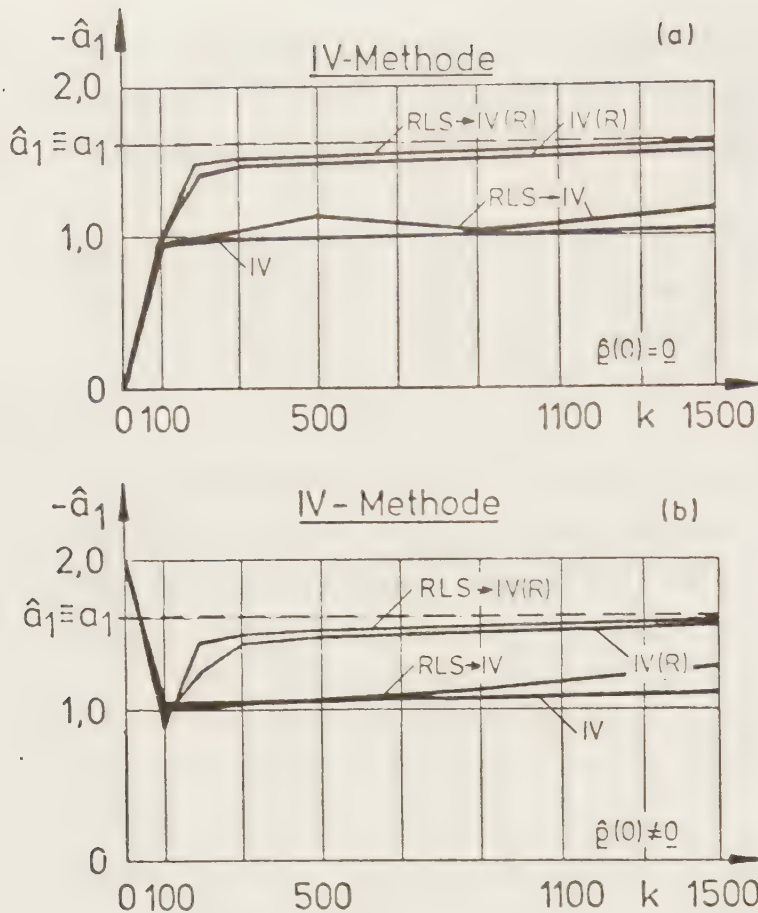


Bild 3.6:

Einfluß verschiedener Maßnahmen zur Konvergenzverbesserung auf den Parameter $\hat{a}_1$ bei Prozeß 1.

($N_u = 31$, $\Delta t_u = 1s$,

$T = 0,1s$, $\lambda_s = 0$,

$\alpha = 10^4$, $k^R = 100$)

hat. Ihre Hauptdiagonalelemente p_{ii} werden im Verlauf einer Schätzung von ihren Anfangswerten ausgehend sehr stark abgebaut (Bild 3.7).

In vielen Fällen verläuft dieser Abbau offensichtlich zu schnell, so daß der Algorithmus divergiert oder zu langsam konvergiert. Die Wahl größerer Anfangswerte für diese Matrixelemente verbessert die Konvergenz nicht allzusehr, kann jedoch unerwünschte Schwankungen im zeitlichen Verlauf der Parameterschätzwerte zur Folge haben [18, 20, 71].

Setzt man nun allerdings nach einer bestimmten Zahl von Schätzungen die Matrix $\underline{P}$ auf ihren Anfangswert zurück, ohne die anderen Größen im Rekursivalgorithmus zu verändern, so läßt sich eine wesentlich schnellere und sicherere Konvergenz der Parameterschätzwerte erreichen. Dabei werden für den

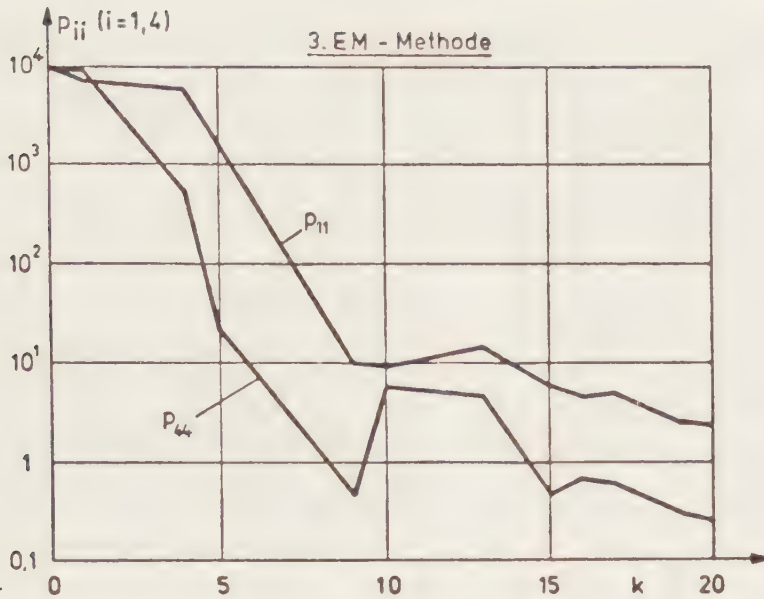


Bild 3.7:

Zeitlicher Verlauf
der Matrizenelemen-
te p_{ii} ($i=1,4$) bei .

Prozeß 1

($N_u = 31$, $\Delta t_u = 1s$,

$T = 0,15s$, $\lambda_s = 0$,

$\alpha = 10^4$)

Rücksetzzeitpunkt k^R i.a. Werte zwischen $k^R = 30$ und $k^R = 100$ gewählt.

Wesentlich ist auch bei dieser Rücksetztechnik (R), daß geeignete Anfangswerte für die Hauptdiagonalelemente p_{ii} eingesetzt werden. Während bei zu klein gewählten Startwerten nur eine schwache Konvergenz sowohl beim Verstärkungsfaktor $\hat{K}_s$ als auch beim Parameter $\hat{a}_1$ festzustellen ist (Bild 3.8), ergeben zu große Werte für p_{ii}^0 z.T. starke Schwankungen der Schätzwerte. Mit $p_{ii}^0 = 10^4$ konnte jedoch ein Startwert gefunden werden, der unter Verwendung der Rücksetztechnik eine schnelle Konvergenz der Parameterschätzwerte und des Verstärkungsfaktors $\hat{K}_s$ ohne Schwankungen liefert.

Wie wesentlich diese Verbesserungen sind, die durch das Rücksetzen der Matrix $\underline{P}$ erzielt werden können, zeigt Bild 3.6, wo Ergebnisse der IV-Methode mit und ohne Verwendung der Rücksetztechnik bzw. der RLS-Methode als Startverfahren verglichen werden. Danach erhält man die besten Ergebnisse, wenn beide Maßnahmen zur Konvergenzverbesserung eingesetzt werden (RLS $\rightarrow$ IV(R)); mit Hilfe der Rücksetztechnik allein (IV(R))

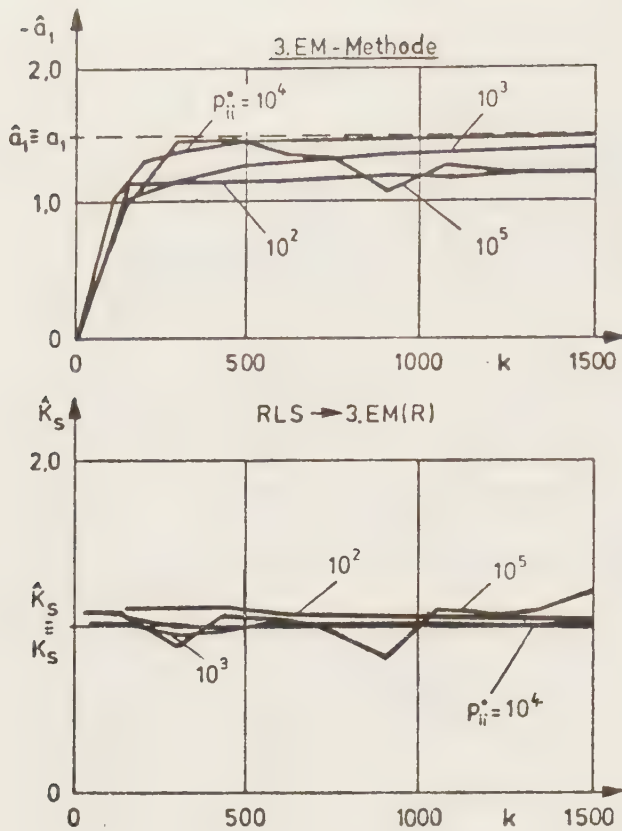


Bild 3.8:

Einfluß der Anfangswerte p_{ii}^0 für die Hauptdiagonalelemente der Matrix $\underline{P}$ auf den Parameter $\hat{a}_1$ und den Verstärkungsfaktor $\hat{K}_s$ bei Prozeß 1
 $(N_u = 31, \Delta t_u = 1s,$
 $T = 0,15s, \lambda_s = 0,$
 $k^R = 100, \hat{p}(0) = \underline{0})$

ergeben sich jedoch nur geringfügig schlechtere Schätzwerte des Parameters $\hat{a}_1$. Gegenüber den anderen beiden Fällen (RLS $\rightarrow$ IV und IV) wird jedoch eine ganz erhebliche Verbesserung erreicht, die bei den geschätzten Übergangsfunktionen $\hat{h}_m(kT)$ nach Bild 3.9 allerdings nicht so deutlich ausfällt wie beim Parameter $\hat{a}_1$ - übrigens ein Zeichen dafür, daß für eine gute Schätzung nicht unbedingt exakte Parameterschätzwerte erforderlich sind.

Die erhaltenen Ergebnisse lassen sich schließlich in folgenden Punkten zusammenfassen:

1. Die Anwendung der Rücksetztechnik (R) zusammen mit der RLS-Methode als Startverfahren erlaubt eine exakte, schnelle und sichere Ermittlung der Identifikationsergebnisse. Ein Hauptgrund dafür ist sicher darin zu suchen, daß durch beide Maßnahmen ein Divergieren der Schätzungen bereits in der Startphase verhindert wird.

2. Nach Bild 3.6 sind beim Einsatz von R die Ergebnisse unabhängig von der Wahl des Startwertes $\hat{p}(0)$.
3. Da sich darüberhinaus $\underline{P}(0) = 10^4 \cdot \underline{I}$ auch bei zahlreichen anderen Systemen als günstiger Startwert für die Matrix $\underline{P}$ bei Anwendung der Rücksetztechnik herausgestellt hat, wird das Anfangswertproblem im Zusammenhang mit rekursiven Parameterschätzverfahren erheblich vereinfacht: Es genügt nämlich, bei beliebigem $\hat{p}(0)$ neben der RLS-Methode als Startverfahren die Rücksetztechnik mit $\underline{P}(0) = 10^4 \underline{I}$ einzusetzen, um gute Identifikationsergebnisse zu erhalten.

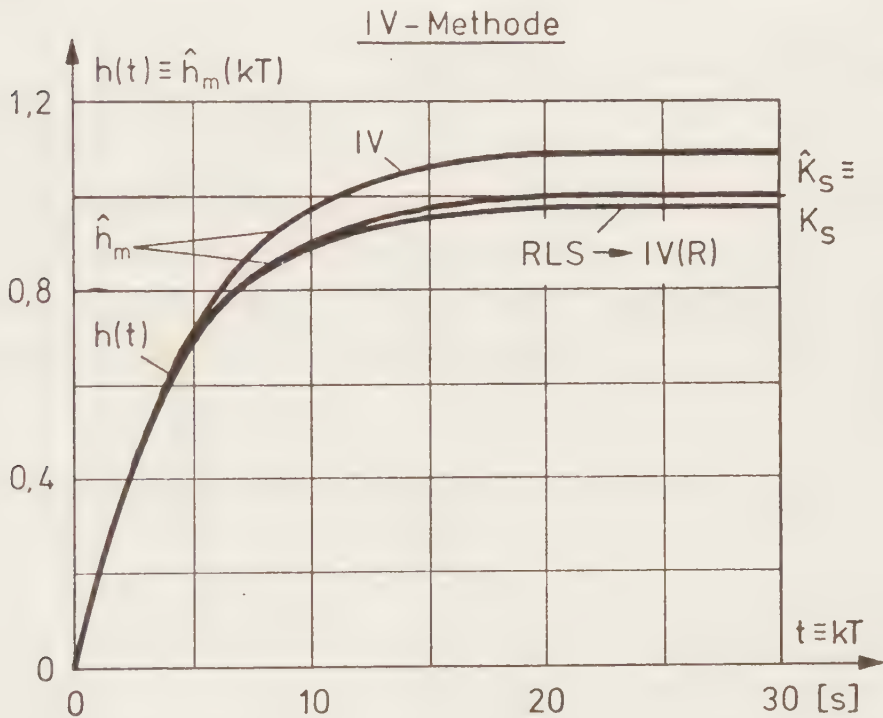


Bild 3.9: Einfluß der Rücksetztechnik und der RLS-Methode als Startverfahren auf die geschätzte Übergangsfunktion $\hat{h}_m(kT)$ bei Prozeß 1 ($N_u = 31$, $\Delta t_u = 1s$, $T = 0,15s$, $\lambda_s = 0$, $k^R = 100$, $\alpha = 10^4$).

R sollte nicht angewendet werden, wenn dem Ausgangssignal starke stochastische Störungen überlagert sind. In diesem Fall genügt es, die RLS-Methode zur Startschätzung heranzuziehen, um divergierende Schätzungen zu vermeiden.

3.3 Ergebnisse der Parameterschätzverfahren

Anhand der Meßwerte des Ein- und Ausgangssignals wurden mit Hilfe der in Abschnitt 2 dargestellten rekursiven Parameterschätzverfahren unter den in Tabelle 3.1 angegebenen 4 Betriebsbedingungen zahlreiche Modelle für Prozeß 1 erstellt. Zur Verbesserung der Konvergenzeigenschaften aller Verfahren wurden dabei die im vorigen Abschnitt vorgeschlagenen Maßnahmen, wie Rücksetztechnik und RLS-Startschätzung, noch bis zu einem Störpegel von $\lambda_s = 0,1$ einschließlich eingesetzt. Bei größeren Störpegeln wurde dagegen nur noch die RLS-Methode als Startverfahren verwendet.

3.3.1 System ohne Rauschen und Drift

Um optimale Bedingungen für die Identifikation zu erhalten, wurden zunächst Untersuchungen bei unterschiedlichen Impulszahlen N_u des Eingangstestsignals und verschiedenen Werten der Abtastzeit T durchgeführt, nachdem die Impulslänge Δt_u bereits zuvor gemäß den in [18] aufgestellten Richtlinien ausgewählt worden war.

Bei einer Abtastzeit von $T = 0,15s$ und $k = 1500$ Meßwerten liefern die 3.EM-, 2.EM-, IV- und 1.EM-Methode unter der in Bild 3.10 angegebenen Betriebsbedingung genaue Schätzwerte für die Parameter und den Verstärkungsfaktor nahezu unabhängig von der Anzahl der Impulse N_u des Eingangssignals u. Dies bedeutet, daß bei einer genügend großen Meßzeit von $T_{mes} = 225s$ die Periodendauer $T_u = N_u \cdot \Delta t_u$ des Eingangssignals ($\Delta t_u = 1s = konst.$) keinen Einfluß auf die Genauigkeit des Modells hat. Lediglich bei der RLS- und RML-Methode, die zwar unbrauchbare $\hat{a}_i$ -Werte, doch zufriedenstellende Schätzwerte des Verstärkungsfaktors liefern, ergibt sich eine geringfügige Abhängigkeit von N_u : Die besten $\hat{K}_s$ -Werte erhält man in diesen beiden Fällen für $N_u = 31$.

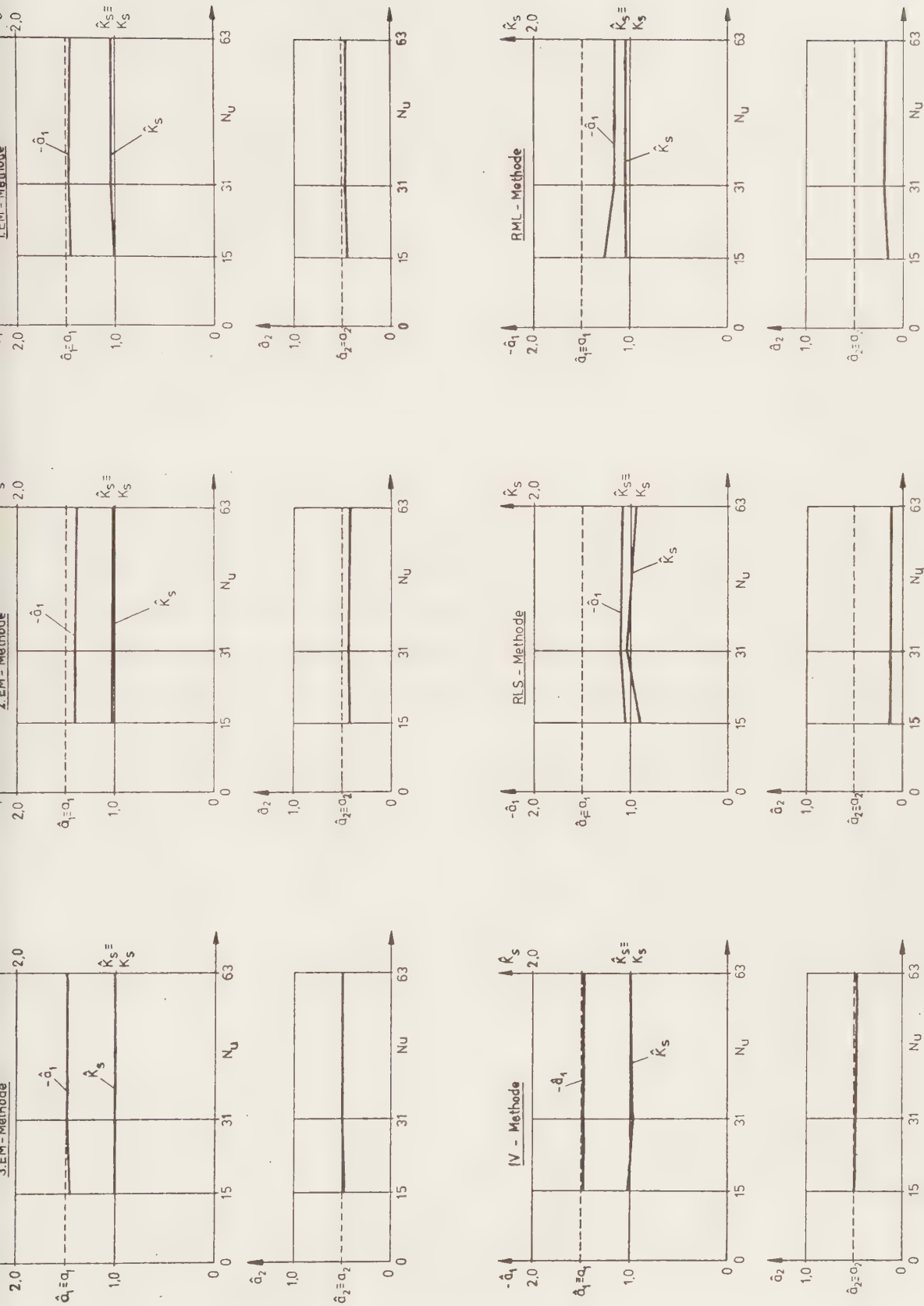


Bild 3.10: Einfluß der Impulszahl N_u auf die Parameter $\hat{a}_i$ und den Verstärkungsfaktor $\hat{K}_S$ bei Prozeß 1
($k = 1500$, $\Delta t_u = 1s$, $T = 0,15s$, $n = 2$, $\lambda_s = 0$)

Verringert man die Meßzeit T_{mes} von 225s auf 150s oder 120s und gleichzeitig zur Erhöhung der Informationsdichte die Abtastzeit T von 0,15s auf 0,1s bzw. 0,08s ($k = 1500 = \text{konst.}$), so liefern die 1.- 3.EM- und die IV-Methode für $N_u = 31$ gleichbleibend genaue $\hat{a}_i$ - und $\hat{K}_s$ -Werte (Bild 3.11).

Für alle anderen N_u -Werte verschlechtern sich dagegen die Parameter $\hat{a}_i$ z.T. erheblich. Eine Erhöhung der Meß- bzw. Abtastzeit auf $T_{\text{mes}} = 300\text{s}$ bzw. $T = 0,2\text{s}$ liefert dagegen Ergebnisse, die völlig unabhängig von der Impulszahl N_u sind. Bei der RLS- und RML-Methode ergeben sich in allen Fällen unbrauchbare $\hat{a}_i$ -, dagegen zufriedenstellende $\hat{K}_s$ -Werte, sofern für die unterschiedlichen Meß- und Abtastzeiten nach Bild 3.11 jeweils $N_u = 31$ gewählt wird.

Bei einem System ohne Rauschen und Drift erweist sich für die untersuchten rekursiven Parameterschätzverfahren somit eine Impulszahl von $N_u = 31$ der gewählten m -Impulsfolge ($m = 5$) als günstig. Mit $\Delta t_u = 1\text{s}$ ist dabei die Dauer des längsten Impulses $\Delta t_{\text{max}} = m \cdot \Delta t_u = 5\text{s}$ des Eingangssignals u nur geringfügig größer als die dominierende Zeitkonstante $T_1 = 4,4\text{s}$ des Systems.

Als optimale Abtastzeit kann $T = 0,15\text{s}$ angesehen werden, da neben $T = 0,2\text{s}$ nur in diesem Fall zufriedenstellende Schätzergebnisse für alle untersuchten Impulszahlen N_u erzielt werden können. Darüberhinaus läßt sich die in Verbindung mit $T = 0,15\text{s}$ nach Bild 3.10 verwendete große Meßzeit $T_{\text{mes}} = 225\text{s}$ noch beträchtlich herabsetzen, da sich auch für wesentlich weniger als 1500 Meßwerte, wie im folgenden zu sehen sein wird, noch brauchbare Schätzwerte ermitteln lassen.

Unter Verwendung von $N_u = 31$ und $T = 0,15\text{s}$ ergeben nach Bild 3.12 sowohl die 3.EM- als auch die IV-Methode ab $k = 100$ Meßwerten den Verstärkungsfaktor $\hat{K}_s = 1,01$ und nach 200 Messungen auch die Parameter $\hat{a}_i$ mit hoher Genauigkeit. Die 1.EM- und 2.EM-Methode liefern unter denselben Bedingungen ebenfalls nach maximal 100 verarbeiteten Datenpaaren exakte $\hat{K}_s$ -Werte; allerdings ist bei



Bild 3.11: Einfluß der Abtastzeit T auf die Parameter $\hat{a}_1$ und den Verstärkungsfaktor $\hat{K}_S$ bei Prozeß 1
($k = 1500$, $N_u = 31$, $\Delta t_u = 1s$, $n = 2$, $\lambda_s = 0$)

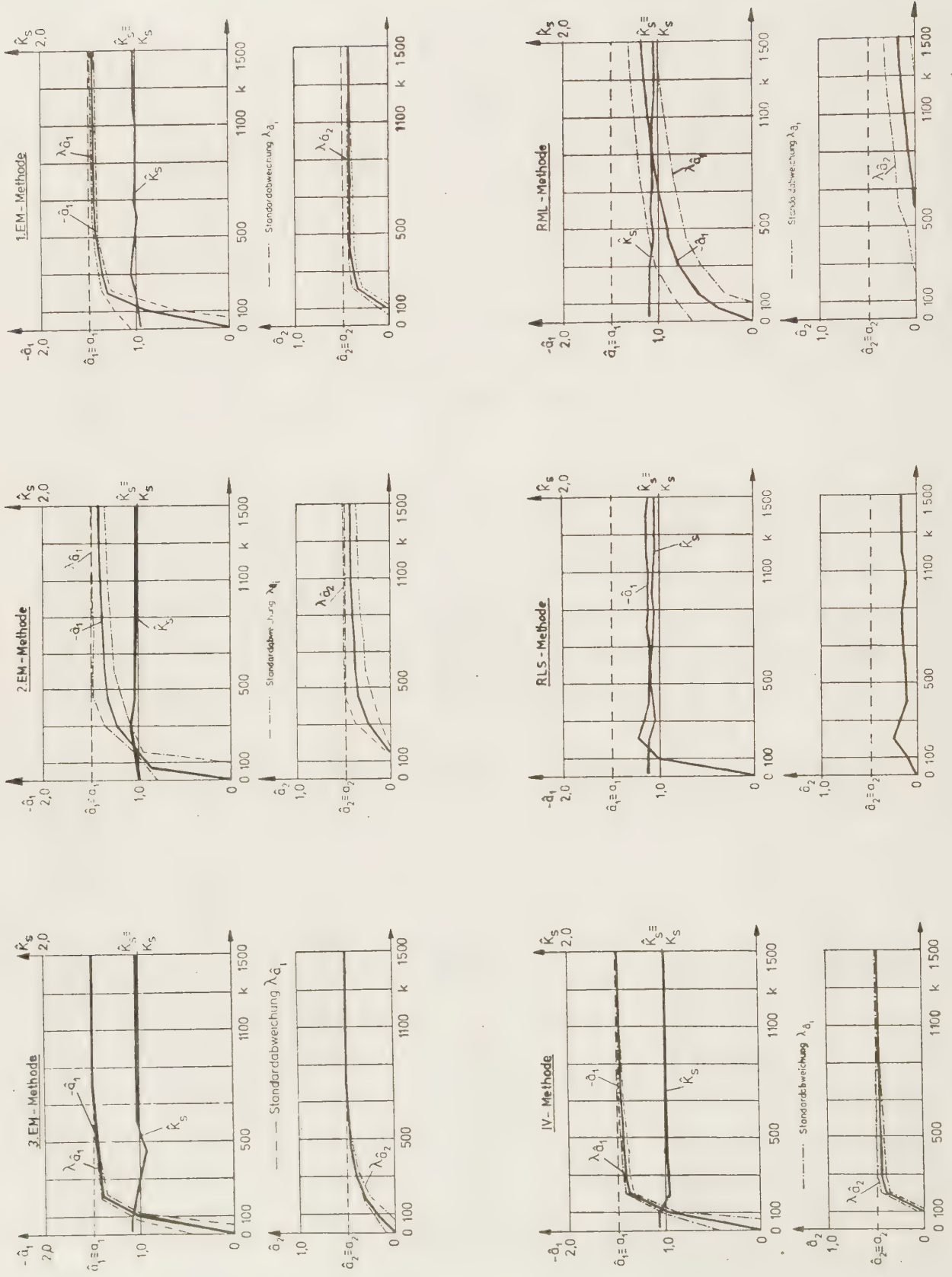


Bild 3.12: Einfluss der Datenzahl k auf die Parameter $\hat{a}_i$ und den Verstärkungsfaktor $\hat{K}_S$ bei Prozeß 1

diesen beiden Verfahren eine etwas langsamere Konvergenz der Parameterschätzwerte $\hat{a}_i$ gegen einen bei $k = 1500$ jedoch auch recht guten Endwert festzustellen. Während die RLS- und RML-Methode zwar zufriedenstellende $\hat{K}_s$ -Werte liefern, sind die Parameter $\hat{a}_i$ in beiden Fällen unbrauchbar.

Von allen untersuchten Parameterschätzverfahren lassen sich also mit der 3.EM- und der IV-Methode eindeutig die genauesten Ergebnisse mit der geringsten Anzahl von gemessenen Datenpaaren ($k = 100$ für $\hat{K}_s$) erzielen. Diese Anzahl entspricht bei einer Abtastzeit von $T = 0,15s$ einer Meßzeit von $T_{mes} = 15s$ und damit ungefähr dem 3,4-fachen der dominierenden Zeitkonstanten $T_1 = 4,4s$ oder dem 0,75-fachen der Abklingzeit $T_a = 20s$ des untersuchten Systems.

3.3.2 System mit Rauschen

Wenn der Systemausgang durch stochastische Störungen überlagert ist (Betriebsbedingung II), muß bei der 3.EM- und der IV-Methode zur Erzielung derselben Genauigkeit von $\hat{K}_s$ wie bei unverrauschten Systemen lediglich die minimal notwendige Anzahl der Meßdaten, z.B. bei $\lambda_s = 0,05$ auf $k = 400$, erhöht werden (Bild 3.13). Für $T = 0,15s$ entspricht die dabei erforderliche minimale Meßzeit $T_{mes} = 60s$ ungefähr dem 14-fachen von T_1 oder dem 3-fachen von T_a und ist damit viermal größer als beim System ohne Rauschen.

Mit zunehmendem Störpegel verschlechtern sich bei allen Verfahren die Schätzwerte des Verstärkungsfaktors stetig; eine exakte Schätzung der Parameter $\hat{a}_i$ ist nicht mehr möglich. Während jedoch bei der 3.EM- und der IV-Methode auch bei hohen Störpegeln ($\lambda_s = 0,2$) noch eine Konvergenz von $\hat{K}_s$ gegen den exakten Wert $K_s = 1$ festgestellt werden kann, liefern fast alle anderen Verfahren unbrauchbare $\hat{K}_s$ -Werte, die sich vor allem bei der RLS-, der RML- und der 1.EM-Methode auch bei wesentlich größeren Meßzeiten überhaupt nicht mehr verbessern (Bild 3.13).

Wie zusätzlich noch durch die in Bild 3.14 in Abhängigkeit vom Störpegel dargestellten geschätzten Übergangsfunktionen $\hat{h}_m(kT)$

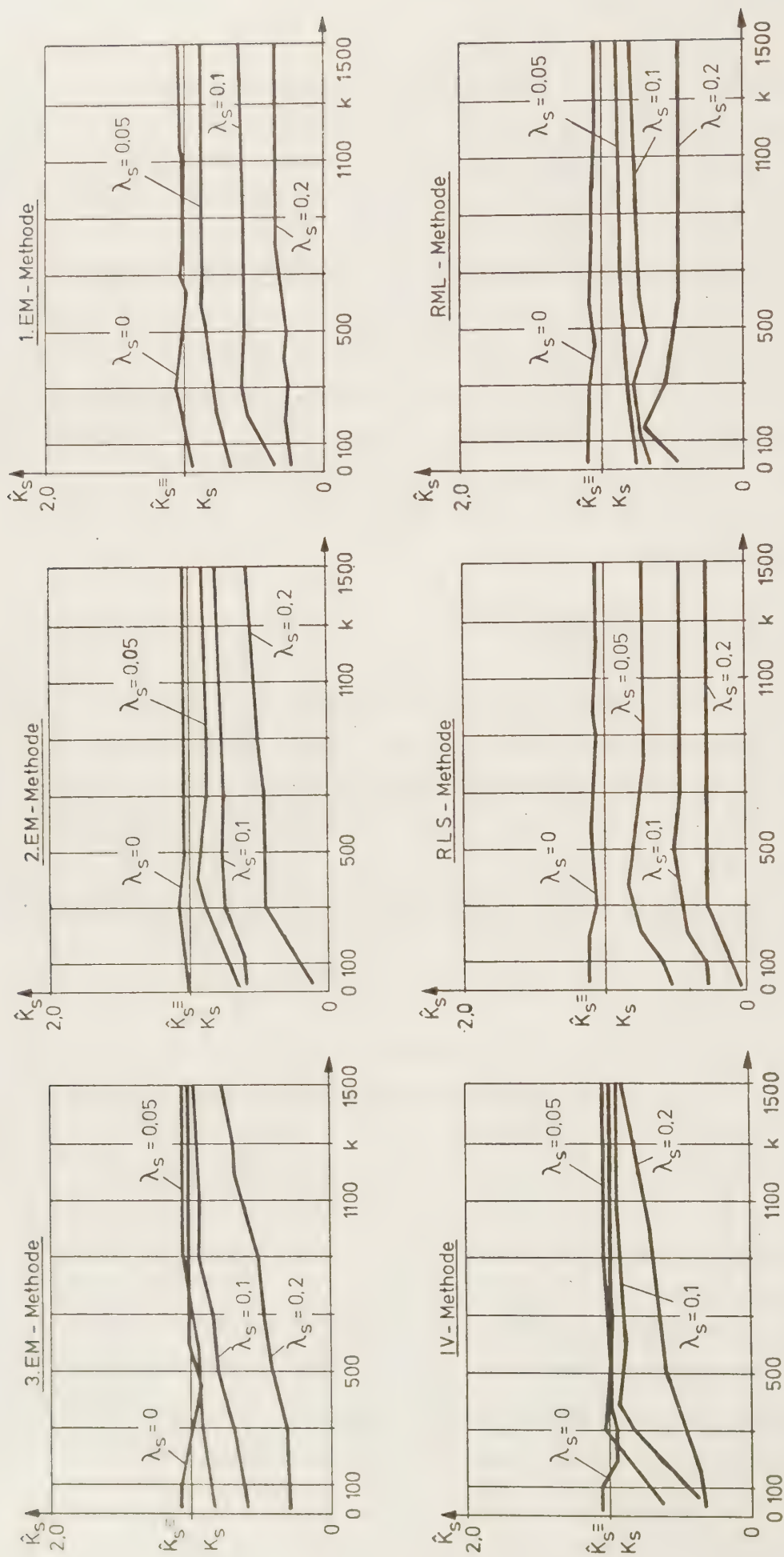


Bild 3.13: Einfluß des Störpegels λ_s auf den Verstärkungsfaktor $\hat{K}_s$ bei Prozeß 1
 $(N_u = 31, \Delta t_u = 1s, T = 0,15s, n = 2)$

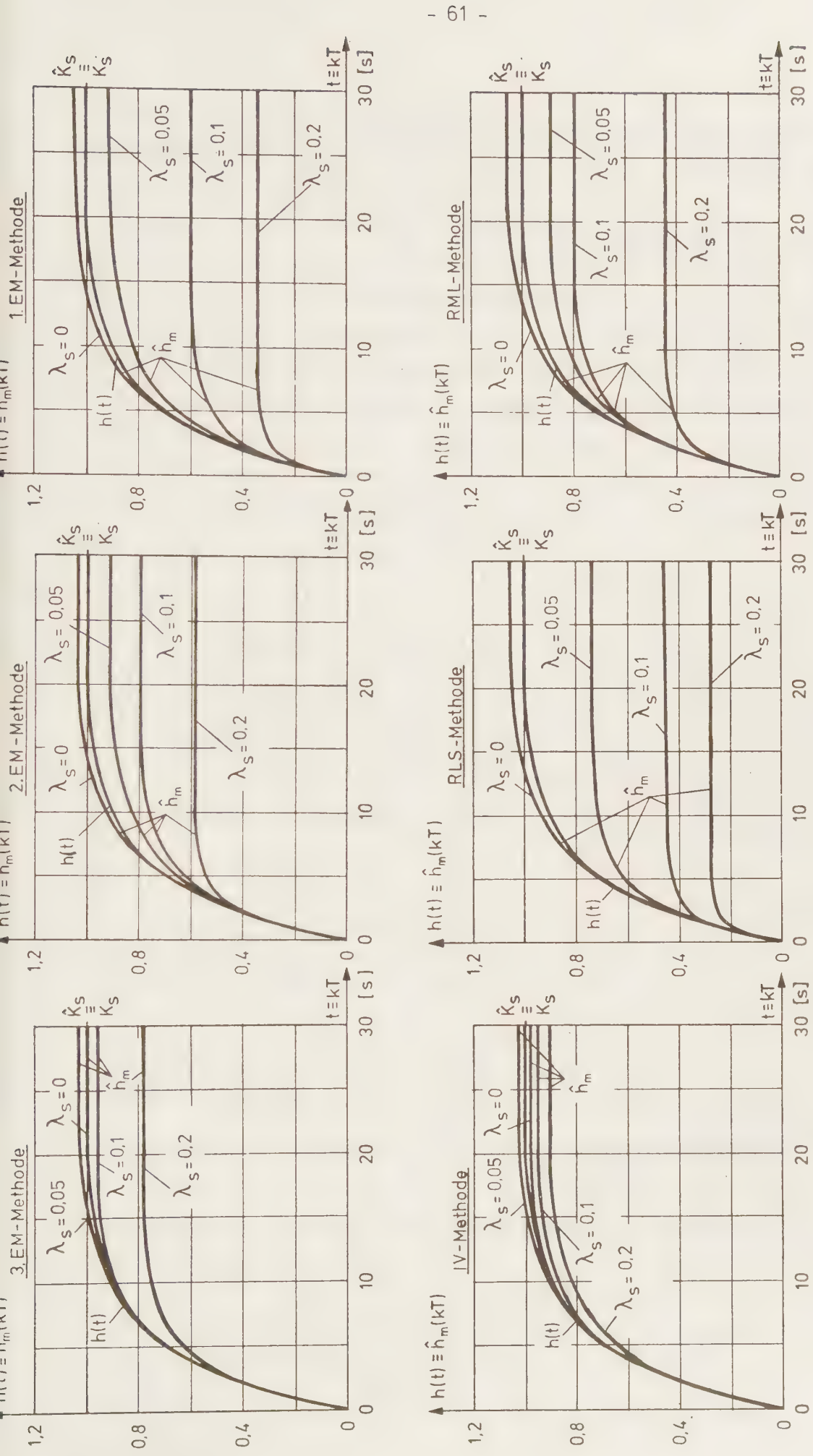


Bild 3.14: Einfluß des Störpegels λ_s auf die geschätzte Übergangsfunktion $\hat{h}_m(kT)$ bei Prozeß 1
 ($k = 1500, N_u = 31, \Delta t_u = 1s, T = 0,15s, n = 2$)

bestätigt wird, erhält man also mit der 3.EM- und der IV-Methode auch unter Betriebsbedingung II die besten Ergebnisse.

3.3.3 System mit Rauschen und Drift

Bei zusätzlich auftretenden niederfrequenten Störungen (Drift) lassen sich weder durch Einsatz der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Maßnahmen zur Konvergenzverbesserung noch durch Variation von N_u oder T brauchbare Identifikationsergebnisse erzielen (Bild 3.15a). Wird jedoch zusätzlich zum rekursiven Schätzalgorithmus ein programmiertechnisch einfach zu realisierendes, diskretes Hochpaßfilter eingesetzt, das niederfrequente Störungen

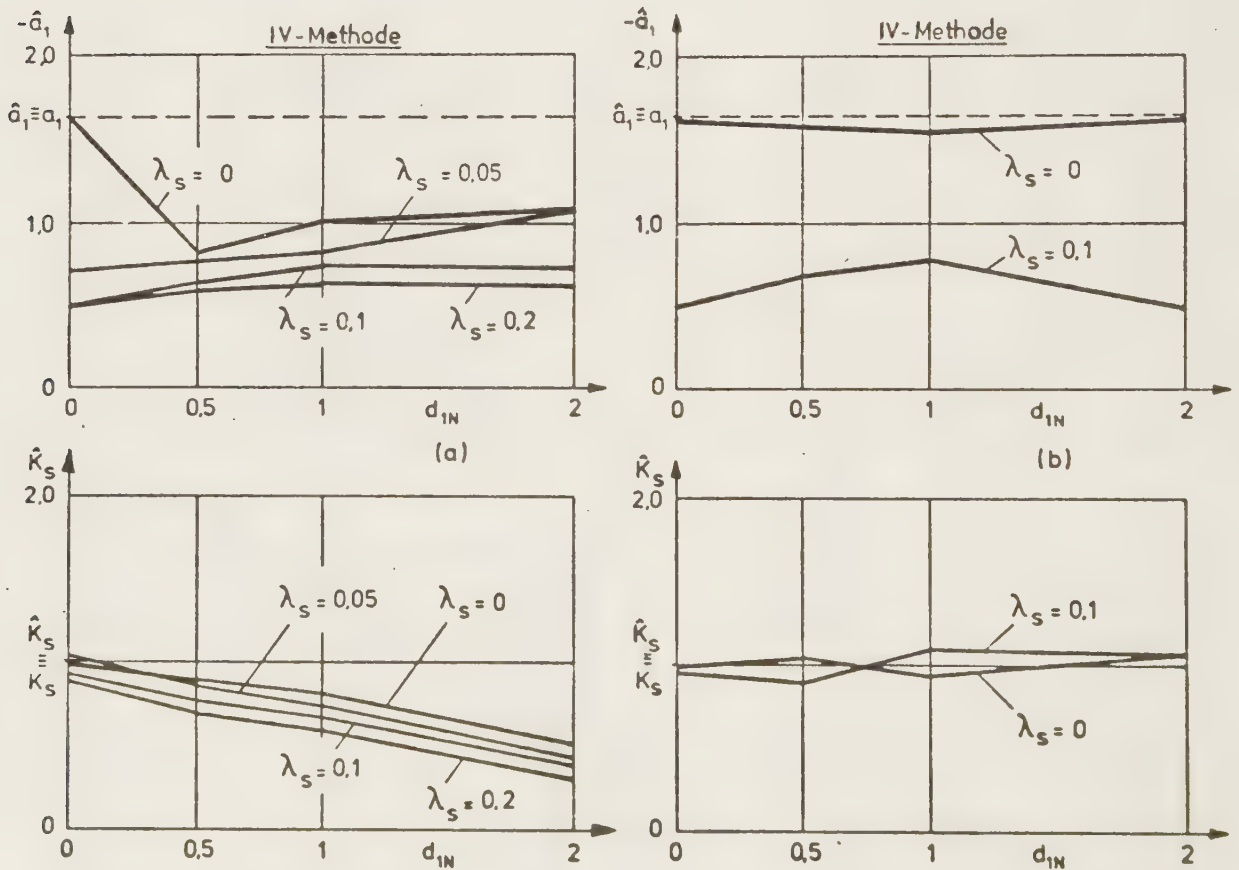


Bild 3.15: Einfluß des Driftpegels d_{1N} auf den Parameter $\hat{a}_1$ und den Verstärkungsfaktor $\hat{K}_s$ ohne (a) bzw. mit Hochpaßfilterung (b) bei Prozeß 1 ($N_u = 31$, $\Delta t_u = 1s$, $T = 0,15s$, $k = 1500$)

gen in Abhängigkeit von der zu wählenden Filterzeitkonstanten (Eckfrequenz) eliminiert [40], so ergeben sich - wie in Bild 3.15b am Beispiel der IV-Methode zu erkennen ist - Schätzwerte $\hat{a}_1$ und $\hat{K}_s$, die auch bei hohen Driftpegeln in der Genauigkeit völlig mit den Ergebnissen am System ohne Drift übereinstimmen. Lediglich der zeitliche Verlauf von $\hat{K}_s$ nach Bild 3.16 weist bei einem Driftpegel von $d_{1N} = 2$ mit und auch ohne Rauschen zu Beginn der Schätzung stärkere Schwankungen auf als der entsprechende Verlauf ohne Einfluß von Drift (Bild 3.13).

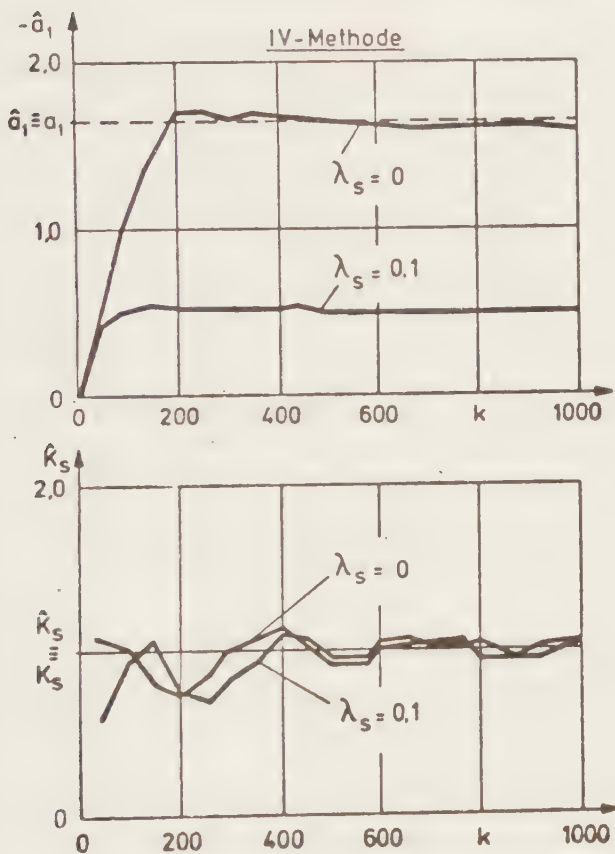


Bild 3.16:

Einfluß der Datenzahl k auf den Parameter $\hat{a}_1$ und den Verstärkungsfaktor $\hat{K}_s$ bei Einsatz der Hochpaßfilterung bei Prozeß 1 ($N_u = 31$, $\Delta t_u = 1s$, $T = 0,15s$, $d_{1N} = 2$)

Die Hochpaßfiltertechnik, auf die hier aus Platzgründen nicht näher eingegangen werden kann, stellt somit ein äußerst wirksames Instrument bei der Identifikation von Systemen mit Drift dar [40], da sie - unabhängig vom eingesetzten Parameterschätzverfahren - für diese Betriebsbedingung die Voraussetzungen für eine exakte Prozeßidentifikation schafft.

3.3.4 Richtlinien für den Einsatz der Parameterschätzverfahren

Aufgrund der in der vorliegenden Arbeit erzielten Identifikationsergebnisse lassen sich für praktische Anwendungen der untersuchten Parameterschätzverfahren die nachfolgend formulierten Richtlinien aufstellen:

1. Zur Konvergenzverbesserung bzw. zur Ermittlung geeigneter Anfangswerte ist es zweckmäßig, bei allen untersuchten Verfahren für die ersten 30 - 100 Schätzungen die RLS-Methode als Startverfahren einzusetzen. Bis zu einem Störpegel von $\lambda_s = 0,1$ wird zusätzlich die Rücksetztechnik verwendet, d.h. beim Umschalten vom RLS-Startverfahren auf die gewünschte Parameterschätzmethode wird gleichzeitig die Matrix $\underline{P}$ auf ihren Anfangswert $\underline{P}(0) = 10^4 \cdot \underline{I}$ zurückgesetzt. Auf beide Maßnahmen kann man verzichten, wenn man andere Modifikationen zur Konvergenzverbesserung - wie z.B. eine Datenwichtung (siehe Abschnitt 4) - einsetzt.
2. Bei Systemen mit Drift wird der Einfluß der niederfrequenten Störungen am zweckmäßigsten mit Hilfe einer Hochpaßfilterung der Ein- und Ausgangssignalwerte eliminiert. Richtlinien zur Wahl einer geeigneten Filterzeitkonstanten findet man in [40].
3. Zur Identifikation von Prozessen mit hohen stochastischen Störungen sind die 3.EM- und die IV-Methode am besten geeignet. Die Meßzeit sollte in diesem Fall bei beiden Verfahren mindestens das 3-fache der Abklingzeit T_a betragen, während beim System ohne Rauschen das 0,75-fache von T_a als Meßzeit ausreicht.
4. Sofern ein PRBS-Signal mit einer m-Impulsfolge als Eingangstestsignal verwendet werden kann, sollten die in Frage kommenden Werte von $N_u = 2^m - 1$ zusammen mit den Werten für Δt_u die Forderung $\Delta t_{\max} = m \Delta t_u \approx T_1$ erfüllen, wobei T_1 die dominierende Zeitkonstante des zu identifizierenden Systems darstellt. Bei stark gestörten Systemen wird dabei möglichst

$N_u = 15$, für ungestörte Systeme $N_u = 63$ verwendet. In vielen Fällen hat sich jedoch $N_u = 31$ als guter Kompromiß erwiesen.

Weitere Richtlinien zur Wahl geeigneter Kennwerte für das Testsignal finden sich in [18]. Sie konnten in der vorliegenden Arbeit alle ohne Ausnahme bestätigt werden.

5. Die Abtastzeit T sollte schließlich so gewählt werden, daß innerhalb der kleinsten vorkommenden Impulsdauer Δt_u mindestens 4, jedoch nicht mehr als 10 Abtastungen vorgenommen werden können, d.h. es gilt $0,1 \Delta t_u \leq T \leq 0,25 \Delta t_u$.

Auf der Grundlage der hier aufgestellten Richtlinien wird nun im folgenden Abschnitt ein Leistungsvergleich der untersuchten Parameterschätzverfahren durchgeführt. Der Vergleich erfolgt dabei für alle Verfahren bei der Identifikation von Prozeß 1 ($N_u = 31$, $\Delta t_u = 1s$, $T = 0,15s$, $n = 2$); bei Prozeß 2 ($N_u = 31$, $\Delta t_u = 2s$, $T = 0,5s$, $n = 3$) werden lediglich die 3.EM- und die IV-Methode eingesetzt, die bereits bei den Voruntersuchungen die besten Ergebnisse geliefert haben.

3.4 Leistungsvergleich der Parameterschätzverfahren

Die 3.EM- und die IV-Methode liefern bei der Identifikation sowohl von Prozeß 1 (Bild 3.17a) als auch von Prozeß 2 (Bild 3.17b) nahezu übereinstimmende, exakte Parameterschätzwerte $\hat{a}_1$, die bei beiden Systemen mit derselben Genauigkeit, bei Prozeß 2 jedoch wesentlich schneller ermittelt werden können als beim System 2. Ordnung. Auch die übrigen Verfahren mit Ausnahme der RLS- und RML-Methode weisen unter dieser Betriebsbedingung I zufriedenstellende Endwerte nach $k = 1500$ Messungen auf; diese werden jedoch wesentlich langsamer erreicht als bei der 3.EM- und IV-Methode. Diese beiden Verfahren liefern auch für den Verstärkungsfaktor sowohl bei Prozeß 1 (Bild 3.18a) als auch Prozeß 2 (Bild 3.18b) exakte Schätzwerte $\hat{K}_s$, die lediglich bei zusätzlich auftretenden Störungen ($\lambda_s = 0,1$) vor allem bei Prozeß 2 stärkere

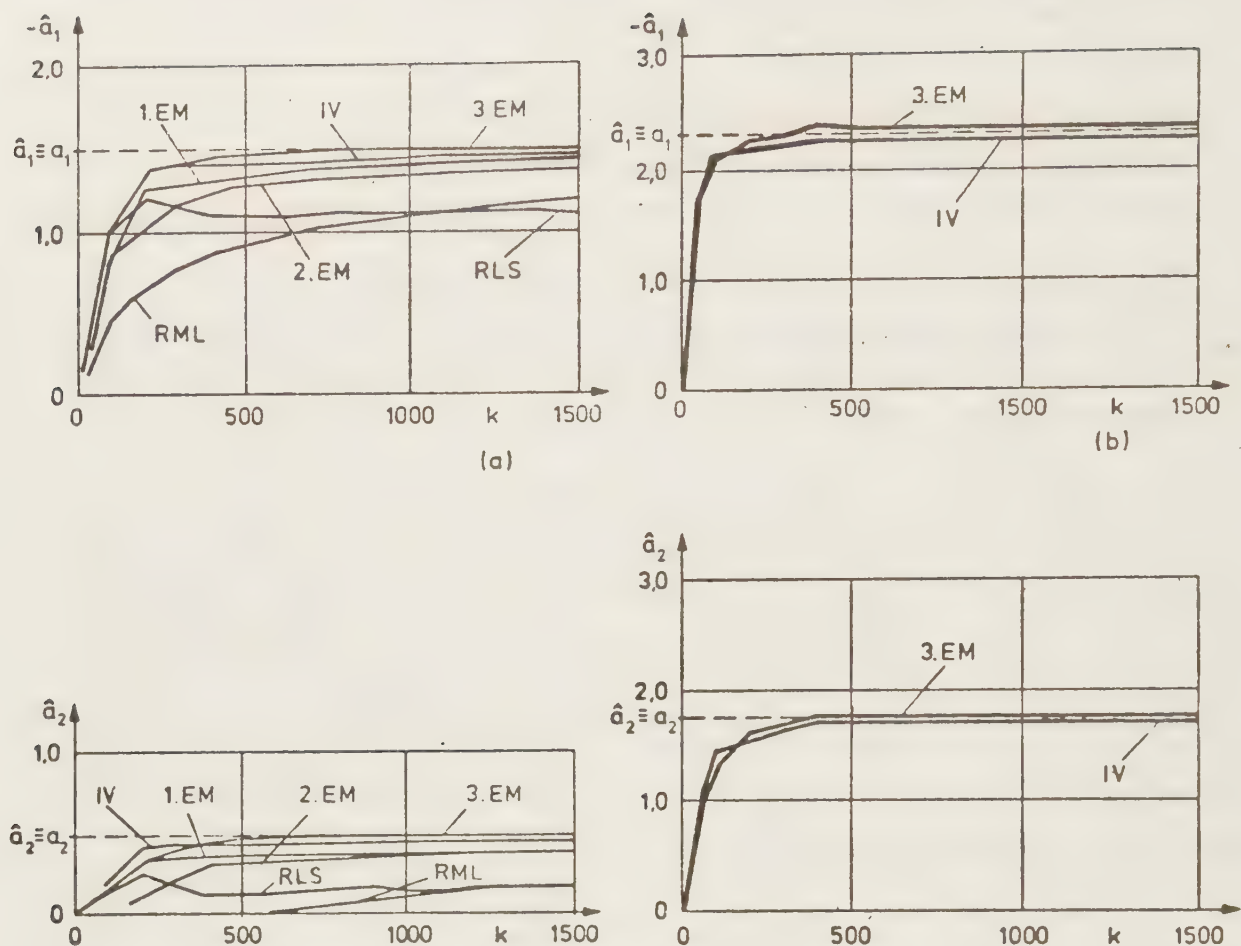


Bild 3.17: Einfluß der Datenzahl k auf die Schätzwerte $\hat{a}_i$ der untersuchten Parameterschätzverfahren bei Prozeß 1 (a) und Prozeß 2 (b) ($\lambda_s = 0$)

Schwankungen im zeitlichen Verlauf aufweisen als im Fall ohne Rauschen. Bei den übrigen Verfahren ist dagegen bei einem Störpegel von $\lambda_s = 0,1$ nur noch eine schwache Konvergenz festzustellen.

Die stetige Verschlechterung der Schätzwerte bei zunehmendem Störpegel λ_s zeigt Bild 3.19. Während bereits bei $\lambda_s = 0,05$ bei Prozeß 1 (Bild 3.19a) und Prozeß 2 (Bild 3.19b) von allen Verfahren unbrauchbare $\hat{a}_1$ -Werte ermittelt werden, ergeben die 3.EM- und die IV-Methode jedoch in beiden Fällen bis $\lambda_s = 0,1$ noch sehr genaue, für $\lambda_s = 0,2$ immer noch zufriedenstellende Schätzwerte des Verstärkungsfaktors.

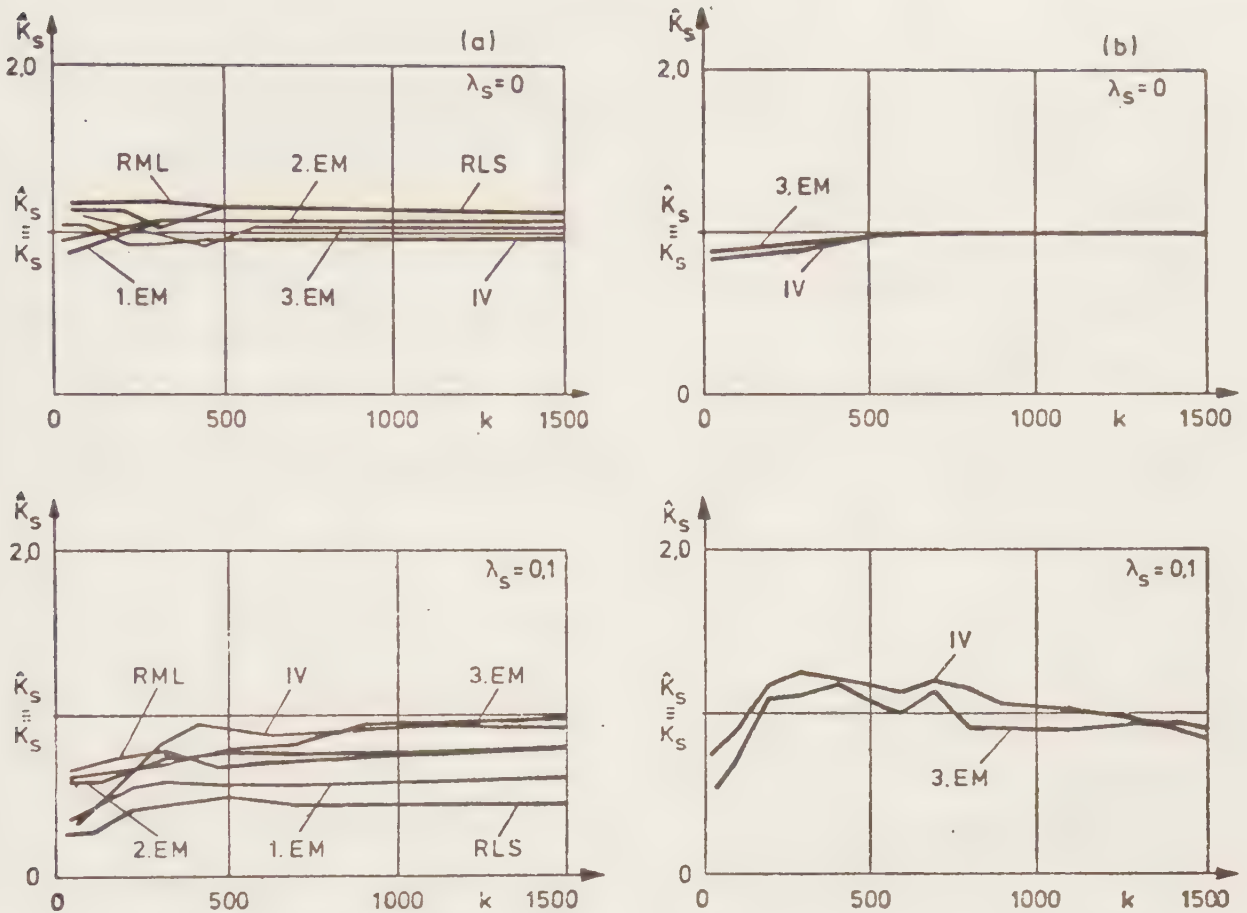


Bild 3.18: Einfluß der Datenzahl k auf den Verstärkungsfaktor K_s für die untersuchten Parameterschätzverfahren bei Prozeß 1 (a) und Prozeß 2 (b)

Die in Bild 3.20 für unterschiedliche Störpegel aufgezeichneten geschätzten Übergangsfunktionen $\hat{h}_m(kT)$ liefern zusätzlich eine eindrucksvolle Bestätigung dieser Aussagen. Darüberhinaus deuten die mit der 3.EM- und IV-Methode auch bei Prozeß 2 erzielten ausgezeichneten Identifikationsergebnisse auf die Allgemeingültigkeit der in Abschnitt 3.3 aufgestellten Richtlinien hin.

Wie die Untersuchungen zeigen, hängt die Güte der Schätzergebnisse bei allen Verfahren gleichermaßen sowohl vom verwendeten Modellansatz als auch vom numerischen Lösungsverfahren ab. So

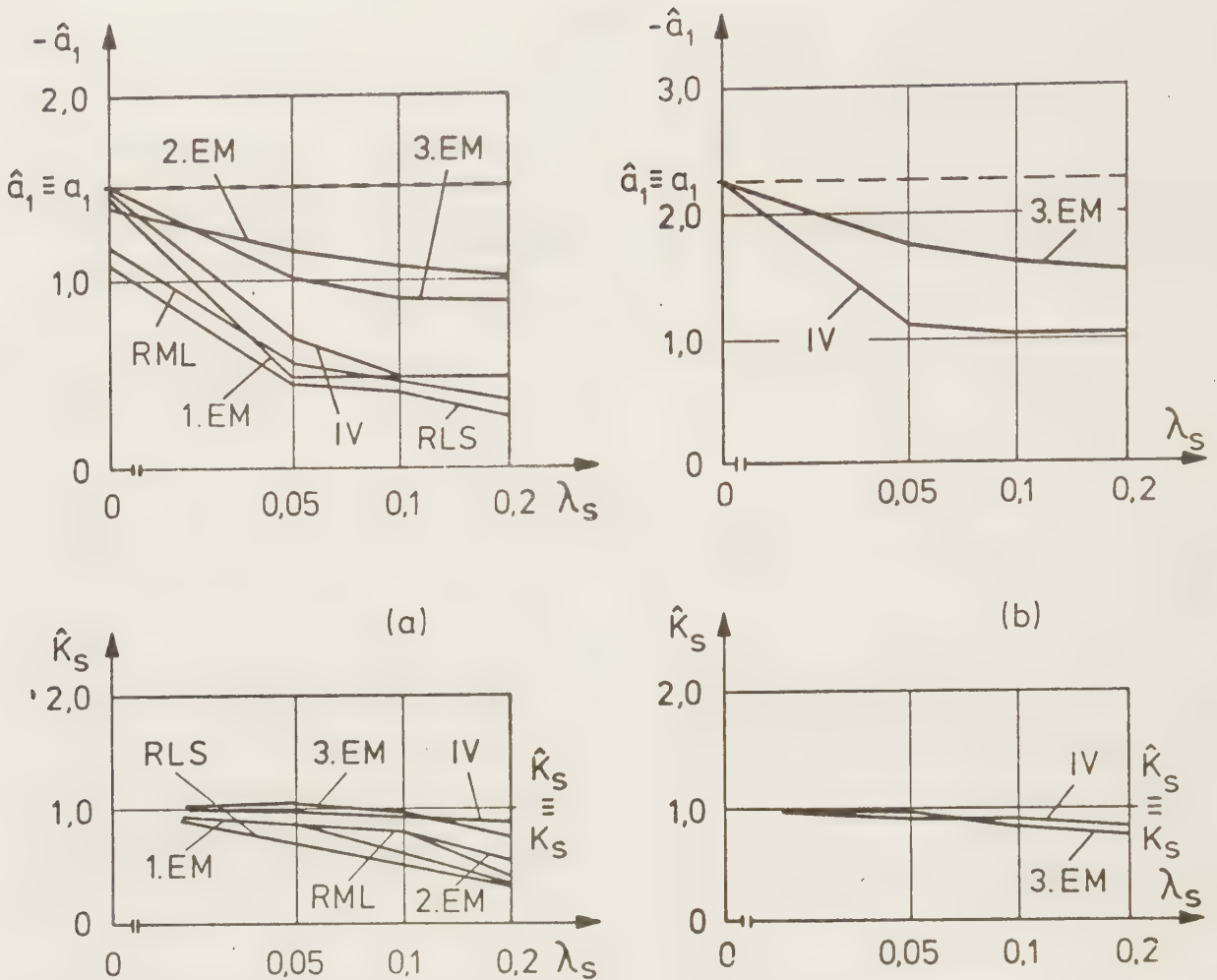


Bild 3.19: Einfluß des Störpegels λ_s auf den Parameter $\hat{a}_1$ und den Verstärkungsfaktor $\hat{K}_s$ bei Prozeß 1 (a) und Prozeß 2 (b)

erhält man bei den erweiterten LS-Methoden, die alle den gleichen, auf der LS-Technik basierenden Rekursivalgorithmus verwenden, umso bessere Schätzwerte, je umfangreicher der verwendete Modellansatz ist. Bei gleichem Modellansatz wie die 2.EM-Methode liefert dagegen die RML-Methode aufgrund eines anderen numerischen Lösungsverfahrens in den meisten Fällen schlechtere Schätzergebnisse. Um gute Identifikationsergebnisse zu erhalten, ist es somit zweckmäßig, Verfahren wie die 3.EM-Methode einzusetzen, die neben dem grundlegenden LS-Rekursivalgorithmus einen möglichst umfangreichen Modellansatz aufweisen. Andererseits wird bei der

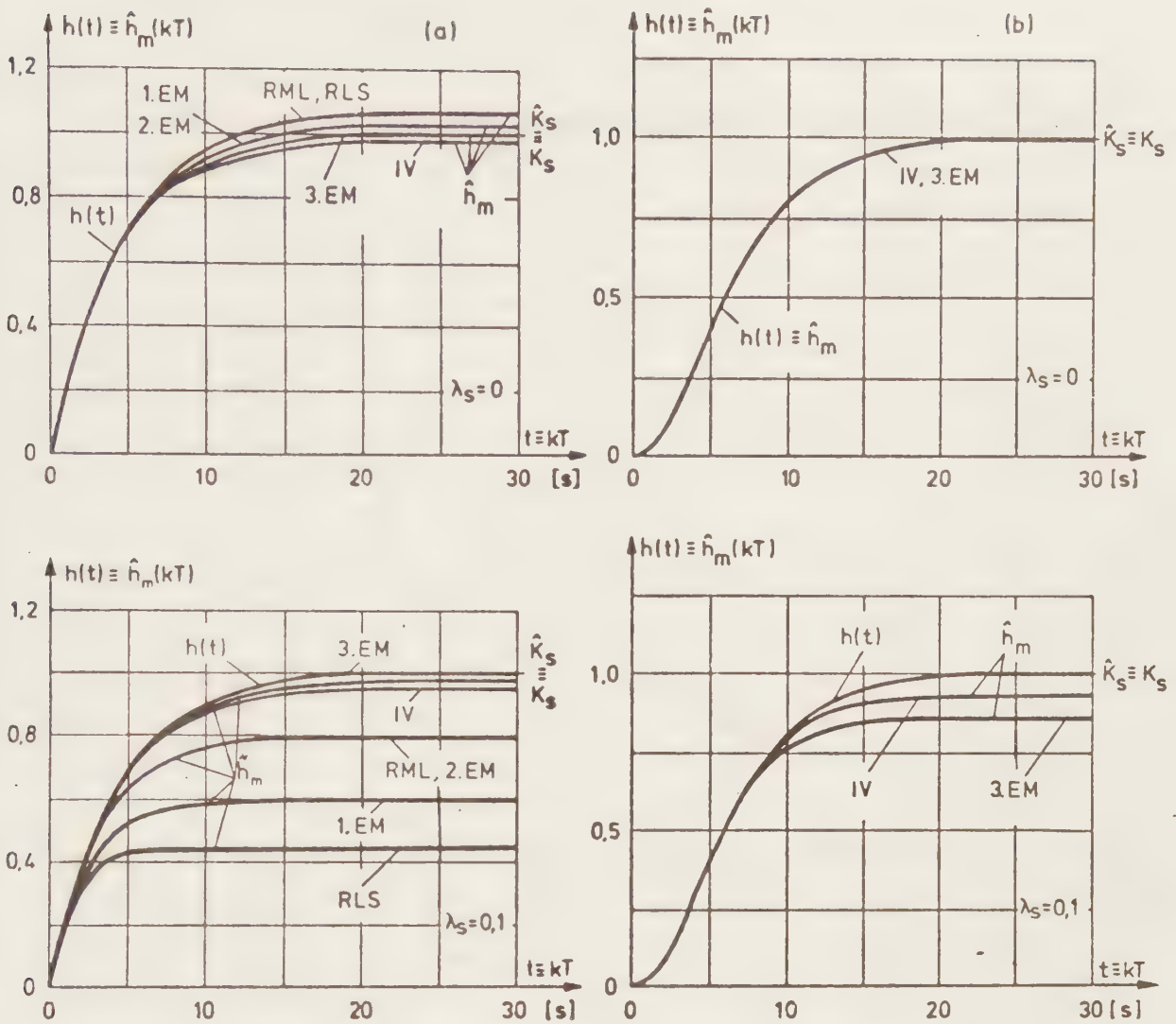


Bild 3.20: Vergleich der gemessenen und für verschiedene Störpegel λ_s geschätzten Übergangsfunktionen $h(t)$ und $\hat{h}_m(kT)$ bei Prozeß 1 (a) und Prozeß 2 (b)

IV-Methode deutlich, daß man mit der sog. Hilfsmodelltechnik ebenfalls ausgezeichnete Schätzwerte erhalten kann, zu deren Ermittlung darüberhinaus wesentlich weniger Rechenaufwand als bei der 3.EM-Methode erforderlich ist.

Nicht zuletzt aus diesem Grund muß der IV-Methode bei einem Vergleich der untersuchten rekursiven Parameterschätzverfahren nach Tabelle 3.2 unbedingt der Vorzug gegenüber allen anderen Methoden eingeräumt werden.

Parameter- schätzverfahren	Rechen- aufwand	Programmier- aufwand	Konvergenz- verhalten	Zuverlässigkeit bei Störungen	Leistungs- fähigkeit
IV	gering, etwas größer als RLS	gering, etwas größer als RLS	sehr gut	90%	groß
3.EM	groß, mehr als doppelt so groß wie RLS	groß	sehr gut	90%	groß
2.EM	mittel	mittel	gut, bei $\lambda_s > 0$ schlecht	70%	zufrieden- stellend
1.EM	mittel	mittel	gut, bei $\lambda_s > 0$ schlecht	65%	zufrieden- stellend
RML	mittel	groß	sehr langsam, bei $\lambda_s > 0$ schlecht	65%	gering
RLS	sehr gering	sehr gering	schlecht	50%	gering

Tabelle 3.2: Leistungsvergleich der untersuchten Parameterschätzverfahren

4. IDENTIFIKATION ZEITVARIANTER SYSTEME MIT DER HILFS-VARIABLEN-METHODE

=====

Neben der Prozeßidentifikation im geschlossenen Regelkreis (siehe Abschnitt 5) stellt die Identifikation zeitvarianter Systeme ein wichtiges Einsatzgebiet für leistungsfähige Kennwertermittlungsverfahren dar. Während einige Arbeiten zur Lösung dieser Aufgabenstellung ein Korrelationsverfahren auf der Grundlage von Empfindlichkeitsfunktionen [42] bzw. eine spezielle Version der Maximum Likelihood-Methode [43] vorschlagen, werden in den meisten Fällen rekursive Parameterschätzverfahren eingesetzt, die dafür besonders geeignet sind, weil sie eine laufende Modellanpassung in Echtzeit ermöglichen und darüberhinaus sehr leicht auf einem Prozeßrechner implementiert werden können (siehe Abschnitt 1).

Zur Identifikation zeitvarianter Prozesse mit rekursiven Parameterschätzverfahren ist allerdings eine geringfügige Modifikation der zugrunde liegenden Rekursivalgorithmen erforderlich. Diese Modifikation erfolgt dabei entweder durch eine Datenwichtung, die den Einfluß zurückliegender Messungen verringert [44, 45], oder in Form eines Modells für die Parametervariationen, das sowohl deterministische als auch stochastische Änderungen der Parameter berücksichtigt [33, 46, 47].

4.1 Gewichtung der Meßdaten

Die einfachste Möglichkeit zur Ermittlung von Parameteränderungen besteht in der Ausstattung des zugrunde liegenden Rekursivalgorithmus mit einem "nachlassenden Gedächtnis" derart, daß beim Anfallen neuer Meßwerte der Einfluß der vorhergehenden Beobachtungen reduziert wird. Diese "Strategie des Vergessens", auch "memory shaping" genannt, läßt sich mit

einer exponentiellen Wichtung der Meßdaten erreichen, wobei die momentanen Daten mit großem Gewicht, die vergangenen Meßwerte jedoch mit umso kleinerem Gewicht versehen werden, je weiter sie zurückliegen.

Zur Herleitung des daraus resultierenden gewichteten Schätzalgorithmus geht man im Zusammenhang mit der IV-Methode von der vektoriellen Darstellung

$$\underline{e} = \underline{y} - \underline{M} \underline{p} \quad (4.1)$$

nach Gl. (2.37) aus, deren einzelne Gleichungen mit dem jeweils aktuellen Wert eines Gewichtungsfaktors $\rho(k) \leq 1$ ($k = n+1, \dots, n+N$) folgendermaßen multipliziert werden:

$$\begin{aligned} \rho(n+N) \dots \rho(n+1) e(n+1) &= \rho(n+N) \dots \rho(n+1) [y(n+1) - \underline{m}^T(n+1) \underline{p}] \\ \rho(n+N) \dots \rho(n+2) e(n+2) &= \rho(n+N) \dots \rho(n+2) [y(n+2) - \underline{m}^T(n+2) \underline{p}] \\ &\vdots \\ \rho(n+N) \rho(n+N-1) e(n+N-1) &= \rho(n+N) \dots \rho(n+N-1) [y(n+N-1) - \underline{m}^T(n+N-1) \underline{p}] \\ \rho(n+N) e(n+N) &= \rho(n+N) [y(n+N) - \underline{m}^T(n+N) \underline{p}]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Führt man noch eine Gewichtsmatrix

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} n+N \\ \pi \rho(j) \\ j=n+1 \end{matrix} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \begin{matrix} n+N \\ \pi \rho(j) \\ j=n+2 \end{matrix} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \begin{matrix} n+N \\ \pi \rho(j) \\ j=n+N-1 \end{matrix} & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \rho(n+N) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

ein, so läßt sich das Gleichungssystem (4.2) in der Form

$$\underline{z} \underline{e} = \underline{z} [\underline{y} - \underline{M} \underline{p}] \quad (4.4)$$

anschreiben. Zur Ermittlung der Modellparameter wird nun auf der Grundlage des gewichteten Fehlervektors $\underline{z} \underline{e}$ nach $n+N$ Messungen die gewichtete Fehlerfunktion

$$I_3(\underline{p}) = \frac{1}{2} \underline{e}^T \underline{z}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{z} \underline{e} \quad (4.5)$$

definiert. I_3 erhält man dabei aus der Fehlerfunktion der IV-Methode nach Gl. (2.38), indem man lediglich $\underline{e}$ durch $\underline{z} \underline{e}$ ersetzt. Das Minimum von $I_3(\underline{p})$ ergibt sich schließlich unter Berücksichtigung von Gl. (4.4) durch Nullsetzen der partiellen Ableitung von I_3 nach $\underline{p}$

$$\left. \frac{\partial I_3(\underline{p})}{\partial \underline{p}} \right|_{\underline{p}=\hat{\underline{p}}} = -\underline{M}^T \underline{z}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{z} \underline{y} + \underline{M}^T \underline{z}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{z} \underline{M} \hat{\underline{p}} = \underline{0}. \quad (4.6)$$

Auflösen nach dem gesuchten Parameterschätzvektor $\hat{\underline{p}}$ liefert die Beziehung

$$\hat{\underline{p}} = [\underline{M}^T \underline{z}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{z} \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{z}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{z} \underline{y}, \quad (4.7)$$

aus der sich unter Berücksichtigung von Gl. (2.40) für große N die direkte Lösungsgleichung der gewichteten IV-Methode ergibt [49]:

$$\boxed{\hat{\underline{p}} = [\underline{W}^T \underline{z} \underline{M}]^{-1} \underline{W}^T \underline{z} \underline{y}}. \quad (4.8)$$

Analog zu Abschnitt 2.3.2 erhält man die rekursive Version dieser Schätzgleichung, indem man von einer der Gl. (4.8) entsprechenden Summendarstellung für k Messungen

$$\hat{\underline{p}}(k) = \underline{p}(k) + \sum_{i=n+1}^k \frac{\pi}{\pi} \rho(j) \underline{w}(i) \underline{y}(i) \quad (4.9)$$

mit

$$\underline{P}(k) = \left[\sum_{i=n+1}^k \pi \rho(j) \underline{w}(i) \underline{m}^T(i) \right]^{-1} \quad (4.10)$$

und $\underline{m}$ bzw. $\underline{w}$ nach Tabelle 2.2 ausgeht.

Nach Anhang B.2 ergibt sich daraus der folgende Rekursivalgorithmus der gewichteten IV-Methode [49, 50]:

$$\underline{\hat{p}}(k+1) = \underline{\hat{p}}(k) + \underline{q}(k+1) \underline{\hat{e}}(k+1) \quad (4.11a)$$

$$\underline{q}(k+1) = \underline{P}(k) \underline{w}(k+1) \left[1 + \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{w}(k+1) \right]^{-1} \quad (4.11b)$$

$$\underline{P}(k+1) = \frac{1}{\rho(k+1)} \left[\underline{P}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \right] \quad (4.11c)$$

$$\underline{\hat{e}}(k+1) = y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \underline{\hat{p}}(k). \quad (4.11d)$$

Die unmittelbare Auswirkung einer derartigen Gewichtung besteht nun darin, daß sie eine zu starke Verkleinerung der Elemente der Matrix $\underline{P}$ verhindert und damit in stärkerem Maße als bisher eine Beeinflussung der Schätzergebnisse durch neu anfallende Meßwerte ermöglicht. Diese im Fall von Parameteränderungen sehr vorteilhafte Eigenschaft wirkt sich jedoch nachteilig bei zusätzlich auftretenden Störungen aus, da sie deren Einfluß auf die Parameterschätzwerte verstärkt.

Eine optimale Wichtung läßt sich somit nur als Kompromiß zwischen einer guten Parameternachführung und einer möglichst großen Störbeseitigung erreichen. In Tabelle 4.1 sind verschiedene Arten von Gewichtungen angegeben, die in den vergangenen Jahren vorgeschlagen wurden [50, 25, 35] mit dem Ziel, möglichst beiden Anforderungen gerecht zu werden: Neben konstanten (G 1) werden dabei vor allem zeitlich veränderliche Gewichtungsfaktoren (G 2 und G 3) verwendet, die eine möglichst flexible Anpassung sowohl an die Parameteränderungen als auch an die Intensität auftretender Störungen ermöglichen sollen. Ihr zeitlicher Verlauf sowie ihr Einfluß auf die Datenwichtung sind in [50] anhand eines Beispiels anschaulich dargestellt.

Als eine spezielle Form der Gewichtung kann schließlich auch eine leicht veränderte Version der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Rücksetztechnik (R) angesehen werden, bei der in bestimmten Zeitabständen k_R die Matrix $\underline{P}$ auf ihren Anfangswert zurückgesetzt und ihre Elemente somit künstlich vergrößert werden [50].

Alle 4 Gewichtungen erfordern beim Einsatz zusammen mit den zugehörigen IV-Rekursivalgorithmen nach Tabelle 4.1 die Vorgabe geeigneter a priori-Werte k_R , ρ_0 , $\rho(0)$, $\Delta\rho$ und $\rho[50]$. Diese konnten jedoch bisher nur auf experimentellem Wege in Abhängigkeit vom Störpegel bzw. der Änderung der Parameter gewonnen werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird deshalb nicht nur ein Vergleich der verschiedenen modifizierten Schätzverfahren an einem zeitvarianten System 2. Ordnung durchgeführt, sondern zusätzlich der Versuch unternommen, für die leistungsfähigsten Verfahren Richtlinien zur Wahl dieser "Gewichtsfaktoren" aufzustellen.

4.2 Modellierung der Parameteränderungen

Eine weitere Vorgehensweise zur Identifikation zeitvarianter Systeme besteht darin, das Parametermodell

$$\underline{p}(k) = \underline{\phi} \underline{p}(k-1) + \underline{\Gamma} \underline{g}(k-1) \quad (4.12)$$

einzuführen, das durch die Matrix $\underline{\phi} = \underline{\phi}(k, k-1)$ deterministische und den Störvektor $\underline{g}(k)$ mit dem Mittelwert

$$E \{ \underline{g}(j) \} = \underline{0} \quad (4.13)$$

und der Kovarianzmatrix

$$E \{ \underline{g}(i) \underline{g}^T(j) \} = \underline{G} \delta_{ij} \quad (4.14)$$

stochastische Änderungen der Parameter beschreibt. Führt man nach Anhang A die Kovarianzmatrix

$$\underline{p}^*(k-1) = \text{cov}[\underline{\tilde{p}}(k-1)] = E \{ \underline{\tilde{p}}(k-1) \underline{\tilde{p}}^T(k-1) \} \quad (4.15)$$

der Schätzfehler

$$\underline{\tilde{p}}(k-1) = \underline{\hat{p}}(k-1) - \underline{p}(k-1) \quad (4.16)$$

ein, so ermöglicht es dieses Modell, vor der Erfassung neuer Meßwerte zum Zeitpunkt k a priori-Werte $\underline{\hat{p}}(k/k-1)$ und $\underline{p}^*(k/k-1)$ auf der Grundlage des Parametervektors $\underline{\hat{p}}(k-1)$ und der Fehlerkovarianzmatrix $\underline{p}^*(k-1)$ zum Zeitpunkt $(k-1)$ vorherzusagen. Gl. (4.12) liefert dazu unter Berücksichtigung der statistischen Eigenschaften von $\underline{g}$ nach Gl. (4.13) die Beziehung

$$E \{ \underline{p}(k) \} = \underline{\emptyset} \underline{p}(k-1), \quad (4.17)$$

so daß ein a priori-Schätzwert für $\underline{\hat{p}}(k)$ mit

$$\underline{\hat{p}}(k/k-1) = \underline{\emptyset} \underline{\hat{p}}(k-1) \quad (4.18)$$

ermittelt werden kann. Ganz entsprechend erhält man aus Gl. (4.12) unter Verwendung von Gl. (4.18) die Beziehung

$$\underline{\tilde{p}}(k/k-1) = \underline{\emptyset} \underline{\hat{p}}(k-1) - \underline{\emptyset} \underline{p}(k-1) - \underline{\Gamma} \underline{g}(k-1) \quad (4.19)$$

bzw.

$$\underline{\tilde{p}}(k/k-1) = \underline{\emptyset} \underline{\tilde{p}}(k-1) - \underline{\Gamma} \underline{g}(k-1) \quad (4.20)$$

für den a priori-Schätzfehler

$$\underline{\tilde{p}}(k/k-1) = \underline{\hat{p}}(k/k-1) - \underline{p}(k), \quad (4.21)$$

dessen Kovarianzmatrix $\underline{p}^*(k/k-1)$ daraus schließlich folgendermaßen berechnet wird:

$$\begin{aligned}
 \underline{P}^*(k/k-1) &= \text{cov}[\underline{\tilde{p}}(k/k-1)] = E\{\underline{\tilde{p}}(k/k-1) \underline{\tilde{p}}^T(k/k-1)\} \\
 &= E\{[\underline{\emptyset} \underline{\tilde{p}}(k-1) - \underline{\Gamma} \underline{g}(k-1)][\underline{\emptyset} \underline{\tilde{p}}(k-1) - \underline{\Gamma} \underline{g}(k-1)]^T\} \\
 &= \underline{\emptyset} E\{\underline{\tilde{p}}(k-1) \underline{\tilde{p}}^T(k-1)\} \underline{\emptyset}^T + \underline{\Gamma} E\{\underline{g}(k-1) \underline{g}^T(k-1)\} \underline{\Gamma}^T - \\
 &\quad - \underline{\emptyset} E\{\underline{\tilde{p}}(k-1) \underline{g}^T(k-1)\} \underline{\Gamma}^T - \underline{\Gamma} E\{\underline{g}(k-1) \underline{\tilde{p}}^T(k-1)\} \underline{\emptyset}^T.
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

Berücksichtigt man, daß sich der Störvektor $\underline{g}(k-1)$ nach Gl. (4.12) nur auf $\underline{p}(k)$ auswirkt, so ergibt sich mit den daraus resultierenden Beziehungen

$$E\{\underline{\tilde{p}}(k-1) \underline{g}^T(k-1)\} = \underline{0} \tag{4.23}$$

und

$$E\{\underline{g}(k-1) \underline{\tilde{p}}^T(k-1)\} = \underline{0} \tag{4.24}$$

für die a priori-Fehlerkovarianzmatrix die vereinfachte Darstellung

$$\underline{P}^*(k/k-1) = \underline{\emptyset} \underline{P}^*(k-1) \underline{\emptyset}^T + \underline{\Gamma} \underline{G} \underline{\Gamma}^T \tag{4.25}$$

mit $\underline{P}^*(k-1)$ und $\underline{G}$ nach Gl. (4.15) bzw. (4.14). Die Gleichungen (4.18) und (4.25) liefern damit die gesuchten Prädiktionen $\underline{\hat{p}}(k/k-1)$ und $\underline{P}^*(k/k-1)$ des Parametervektors $\underline{\hat{p}}(k)$ bzw. der Fehlerkovarianzmatrix $\underline{P}^*(k)$ auf der Grundlage der zum Zeitpunkt $(k-1)$ vorliegenden Werte.

Kombiniert man nun diese beiden Beziehungen mit dem Rekursionalgorithmus der LS-Methode nach Gl. (2.30) und ersetzt dabei die Matrix $\underline{P}$ näherungsweise [35] durch die für große k gültige Fehlerkovarianzmatrix

$$\underline{P}^*(k) = \sigma^2 \underline{P}(k) \tag{4.26}$$

nach Anhang A, Gl. (A.27), so erhält man auf der Grundlage des Parametermodells nach Gl. (4.12) schließlich den folgen-

den LS-Rekursivalgorithmus zur Identifikation zeitvarianter Systeme:

$$\underline{\hat{p}}(k+1/k) = \underline{\emptyset} \underline{\hat{p}}(k) \quad (4.27a)$$

$$\underline{p}^*(k+1/k) = \underline{\emptyset} \underline{p}^*(k) \underline{\emptyset}^T + \underline{\Gamma} \underline{G} \underline{\Gamma}^T \quad (4.27b)$$

$$\underline{\hat{p}}(k+1) = \underline{\hat{p}}(k+1/k) + \underline{q}(k+1) \underline{\hat{e}}(k+1) \quad (4.27c)$$

$$\underline{q}(k+1) = \underline{p}^*(k+1/k) \underline{m}(k+1) [\sigma^2 + \underline{m}^T(k+1) \underline{p}^*(k+1/k) \underline{m}(k+1)]^{-1} \quad (4.27d)$$

$$\underline{p}^*(k+1) = \underline{p}^*(k+1/k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{p}^*(k+1/k) \quad (4.27e)$$

$$\underline{\hat{e}}(k+1) = y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \underline{\hat{p}}(k+1/k). \quad (4.27f)$$

Eine andere Möglichkeit zur Herleitung dieser Rekursivbeziehungen besteht in der Anwendung des Kalman-Bucy-Filteralgorithmus [51], wobei Gl. (4.12) und Gl. (2.20) als System- und Beobachtungsgleichung eines linearen Zustandsschätzproblems interpretiert werden müssen.

Der Rekursivalgorithmus nach Gl. (4.27) hat ausschließlich theoretische Bedeutung, da es in der Praxis unmöglich ist, sämtliche für eine Schätzung erforderlichen Größen des Parametermodells (4.12) genau zu spezifizieren. Oft wird deshalb aus den verschiedenen Möglichkeiten zur Beschreibung der Parametervariationen [50] das einfachere "random walk"-Modell

$$\underline{p}(k) = \underline{p}(k-1) + \underline{g}(k-1) \quad (4.28)$$

ausgewählt, das aus Gl. (4.12) durch die Substitution

$$\underline{\emptyset} = \underline{\Gamma} = \underline{I} \quad (4.29)$$

hervorgeht. In diesem Fall müssen für den Einsatz des daraus resultierenden LS-Rekursivalgorithmus lediglich die Elemente der Matrix $\underline{G}$ festgelegt werden.

Da Gl. (4.26) im Zusammenhang mit der IV-Methode keine Gültigkeit besitzt, ist die Herleitung eines der Gl. (4.27) entsprechenden Rekursivalgorithmus in diesem Fall leider nicht möglich. Trotzdem legen es die große Leistungsfähigkeit dieses Verfahrens (siehe Abschnitt 3.4) und die starke Übereinstimmung der verschiedenen rekursiven Schätzverfahren nach Tabelle 2.2 nahe, auch den Rekursivalgorithmus der IV-Methode nach Gl. (2.47) auf ähnliche Weise zu modifizieren. Eine solche mehr oder weniger heuristische Modifikation führt auf der Grundlage des "random walk"-Modells (M 3) nach Gl. (4.28) bzw. Tabelle 4.1 zu folgenden Rekursivbeziehungen für die IV-Methode:

$$\hat{\underline{p}}(k+1) = \hat{\underline{p}}(k) + \underline{q}(k+1) \hat{\underline{e}}(k+1) \quad (4.30a)$$

$$\underline{q}(k+1) = \underline{P}(k+1/k) \underline{w}(k+1) [1 + \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k+1/k) \underline{w}(k+1)]^{-1} \quad (4.30b)$$

$$\underline{P}(k+1/k) = \underline{P}(k) + \underline{G}^* \quad (4.30c)$$

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k+1/k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k+1/k) \quad (4.30d)$$

$$\hat{\underline{e}}(k+1) = y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \hat{\underline{p}}(k). \quad (4.30e)$$

Der einzige Unterschied zum IV-Algorithmus für konstante Parameter nach Gl. (2.47) besteht in der zusätzlichen Verwendung einer Matrix $\underline{G}^*$, die der Kovarianzmatrix $\underline{G}$ der Parameteränderungen im Fall der RLS-Methode nach Gl. (4.27) entspricht.

$\underline{G}^*$ verhindert dabei - ähnlich wie die Datenwichtung nach Abschnitt 4.1 - eine zu starke Verkleinerung der Elemente von $\underline{P}$ und stellt somit ebenfalls eine spezielle Art von Gewichtung dar. Zum Einsatz des IV-Algorithmus mit Parametermodell (M 3) ist es jetzt nur noch nötig, diese Gewichtsmatrix $\underline{G}^*$ genau zu spezifizieren und Richtlinien für ihre Wahl aufzustellen. Dabei kann von einer direkten Zuordnung zwischen ihren Hauptdiagonalelementen g_{ii} ($i=1,2,\dots,2n$) und

den zu schätzenden veränderlichen Parametern ausgegangen werden. Man erhält auf diese Weise einen äußerst flexiblen Identifikationsalgorithmus, da im Gegensatz zur Datenwichtung eine gezielte Bewertung der einzelnen Parameter möglich ist [33, 50].

Dagegen ist insbesondere in der Praxis die Handhabung der Gewichtungen G_1 und G_3 einfacher, da vor dem Einsatz dieser Verfahren jeweils nur ein Faktor ρ_0 bzw. ρ gewählt werden muß, während bei M_3 immerhin $2 \cdot n$ Elemente der Diagonalmatrix $\underline{G}^*$ als a priori-Werte anzugeben sind. Da eine optimale Festlegung dieser Werte - wie auch bei der Datenwichtung - bisher in den meisten Fällen nur durch langwierige Experimente möglich war, soll in den folgenden Abschnitten versucht werden, sowohl eine Untersuchung der verschiedenen, in Tabelle 4.1 angegebenen modifizierten Schätzverfahren durchzuführen, als auch Richtlinien zur Wahl solcher "Gewichtsfaktoren" für die leistungsfähigsten Verfahren in Abhängigkeit vom Störpegel bzw. der Änderung der Parameter aufzustellen.

4.3 Das untersuchte Regelsystem

Zur Erprobung der speziell für die Identifikation zeitvarianter Systeme modifizierten IV-Algorithmen nach Tabelle 4.1 wurde das in Abschnitt 3.1 mit Prozeß 1 bezeichnete, analog simulierte Regelsystem 2. Ordnung mit der kontinuierlichen Übertragungsfunktion

$$G_{m1}(s) = \frac{g_0 + 0,2s + 0,01s^2}{1 + 4,5s + s^2} \quad (4.31)$$

nach Gl. (3.1a) und der zugehörigen diskreten Übertragungsfunktion für eine Abtastzeit von $T = 100 \text{ ms}$

$$G_{m1}(z) = \frac{0,01 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - 1,6296z^{-1} + 0,6376z^{-2}} \quad (4.32)$$

Methode	Rekursivalgorithmus	Modifikation	a priori-Werte (Gewichtsfaktoren)
IV-Methode	$\hat{p}(k+1) = \hat{p}(k) + \underline{q}(k+1) \hat{e}(k+1)$ $\underline{q}(k+1) = \underline{p}(k) \underline{w}(k+1) [1 + \underline{m}^T(k+1) \underline{p}(k) \underline{w}(k+1)]^{-1}$ $\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{p}(k)$ $\hat{e}(k+1) = y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \hat{p}(k)$	R: Rücksetzen von $\underline{p}$	Rücksetzzeit- punkte $k^R = 1 \cdot k_R$ ($i=1,2,\dots$)
gewichtete IV-Methode	$\hat{p}(k+1)$ wie oben $\underline{q}(k+1)$ wie oben $\underline{p}(k+1) = \frac{1}{\rho(k+1)} [\underline{p}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{p}(k)]$ $\hat{e}(k+1)$ wie oben	G1: $\rho(k) = \rho_0 < 1$ G2: $\rho(k+1) = \rho(k) + [1 - \rho(k)] \Delta \rho$ $\rho(0) < 1$ G3: $\rho(k+1) = 1 - \frac{\rho}{1 - (1 - \rho)^{k+1}}$ $\rho(1) = 1$ und $\rho < 1$	ρ_0 $\rho(0), \Delta \rho$ ρ
IV-Methode mit Parameter- modell	$\hat{p}(k+1)$ wie oben $\underline{q}(k+1) = \underline{p}(k+1/k) \underline{w}(k+1) [1 + \underline{m}^T(k+1) \underline{p}(k+1/k) \underline{w}(k+1)]^{-1}$ $\underline{p}(k+1/k) = \underline{p}(k) + \underline{G}^M$ $\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k+1/k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{p}(k+1/k)$ $\hat{e}(k+1)$ wie oben	M3: $\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) + \underline{g}(k)$	$\underline{G}^M$ mit g_{11} ($i=1,2,\dots,2n$)

Tabelle 4.1: Modifizierte Algorithmen der IV-Methode zur Identifikation zeitvarianter Systeme (Erläuterungen siehe Text)

	Änderungsrate			
	A	B	C	D
Länge des Meßintervalls	100 s			225 s
Anzahl der Abtastungen	1000			2250
Anzahl der Parameteränderungen im Meßintervall	1	4	19	11
absolute Änderung von K_s und b_1 bzw. b_2 im Meßintervall: ΔK_s $\Delta b_1 \quad (i = 1,2)$	0,5 $2 \cdot 10^{-3}$	2 $8 \cdot 10^{-3}$	9,5 $3,8 \cdot 10^{-2}$	5,5 $2,2 \cdot 10^{-2}$
Änderung von K_s und b_1 bzw. b_2 pro Abtastintervall (Änderungsgeschwindigkeit) $\Delta_k K_s$ $\Delta_k b_1 \quad (i=1,2)$	$5 \cdot 10^{-4}$ $2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-3}$ $8 \cdot 10^{-6}$	$9,5 \cdot 10^{-3}$ $3,8 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$ $9,7 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 4.2: Untersuchte Änderungsraten der Parameter

als Testprozeß verwendet. Der noch frei wählbare Parameter g_0 und damit auch der Verstärkungsfaktor K_s wurden im Verlauf der Messungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten sprunghaft zwischen 1 ($\equiv K_{s1}$) und 0,5 ($\equiv K_{s2}$) variiert (Bild 4.1), was eine Änderung von b_1 und b_2 um den Betrag $2 \cdot 10^{-3}$ zur Folge hat [50]. Die zugehörigen Übergangsfunktionen h_1 bzw. h_2 sind in Bild 4.2 aufgezeichnet.

Insgesamt wurden die in Tabelle 4.2 angegebenen 4 verschiedenen Änderungsraten A bis D der Parameter g_0 bzw. b_i ($i=1,2$) untersucht. Die entsprechenden Zeitverläufe sind am Beispiel von K_s in Bild 4.1 dargestellt. Dabei wurde vor allem im Fall D versucht, das System auch bei zunehmender Häufigkeit der Parameteränderungen zu identifizieren. Zum besseren Überblick über die unterschiedlichen Meßbedingungen sind in Bild 4.3 zusätzlich die Zeitverläufe der Ausgangssignale $y(t)$ für die 4 Änderungsraten im Fall ohne Rauschen ($\lambda_s = 0$) dargestellt.

Da die geänderten Parameter b_1 und b_2 der diskreten Übertragungsfunktion nach Gl. (4.32) wertemäßig sehr klein sind [50], erfolgt im nächsten Abschnitt die Beurteilung der Schätzergebnisse, die unter Beachtung der in Abschnitt 3.3 aufgestellten Richtlinien ermittelt wurden, in erster Linie anhand der für den Verstärkungsfaktor, die Übergangsfunktion bzw. das Ausgangssignal erhaltenen Schätzwerte $\hat{K}_s$, $\hat{h}_m$ und $\hat{y}_m$ ($N_u = 31$, $\Delta t_u = 1s$, $T = 100ms$).

4.4 Ergebnisse der Identifikation

Vor dem Einsatz der modifizierten Schätzverfahren nach Tabelle 4.1 wurden zum Vergleich verschiedene Identifikationsläufe mit dem ungewichteten IV-Rekursionalgorithmus nach Gl. (2.47) durchgeführt, deren Ergebnisse für die 4 Änderungsraten A bis D in Bild 4.4 dargestellt sind. Der Verlauf des dort aufgezeichneten, geschätzten Verstärkungs-

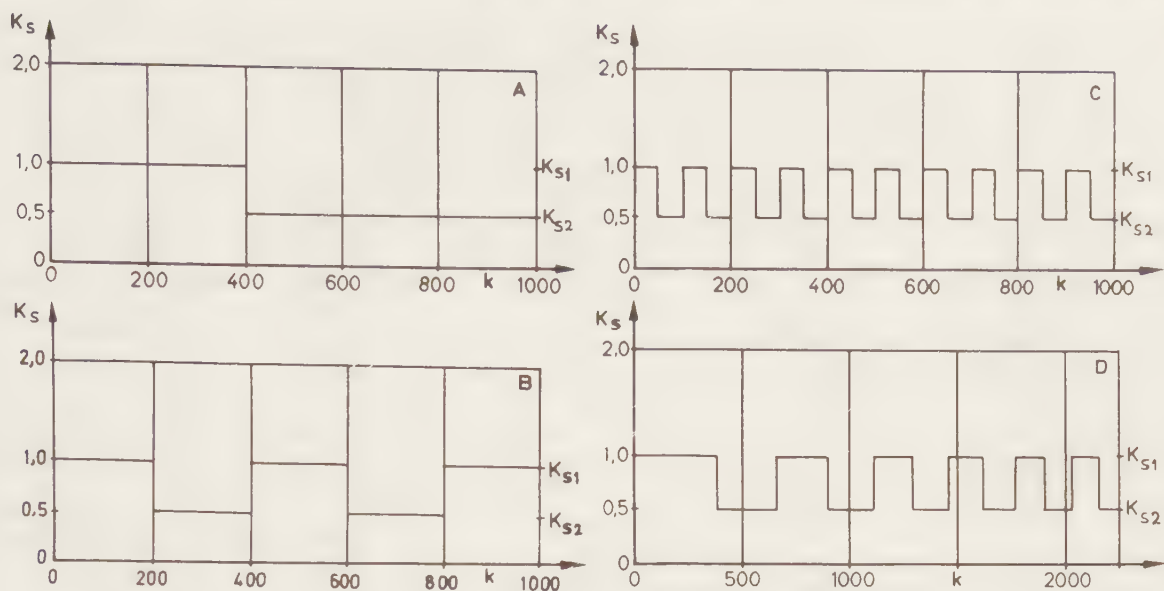


Bild 4.1: Verlauf des Verstärkungsfaktors K_S für die untersuchten Änderungsraten A bis D

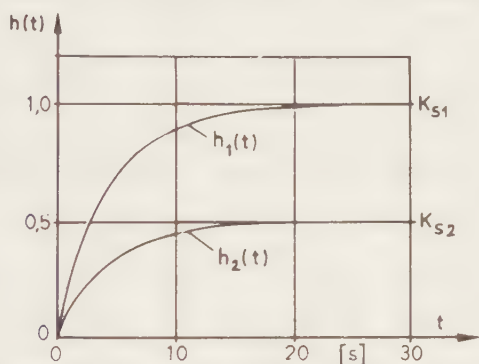


Bild 4.2: Verlauf der Übergangsfunktionen $h_1(t)$ und $h_2(t)$

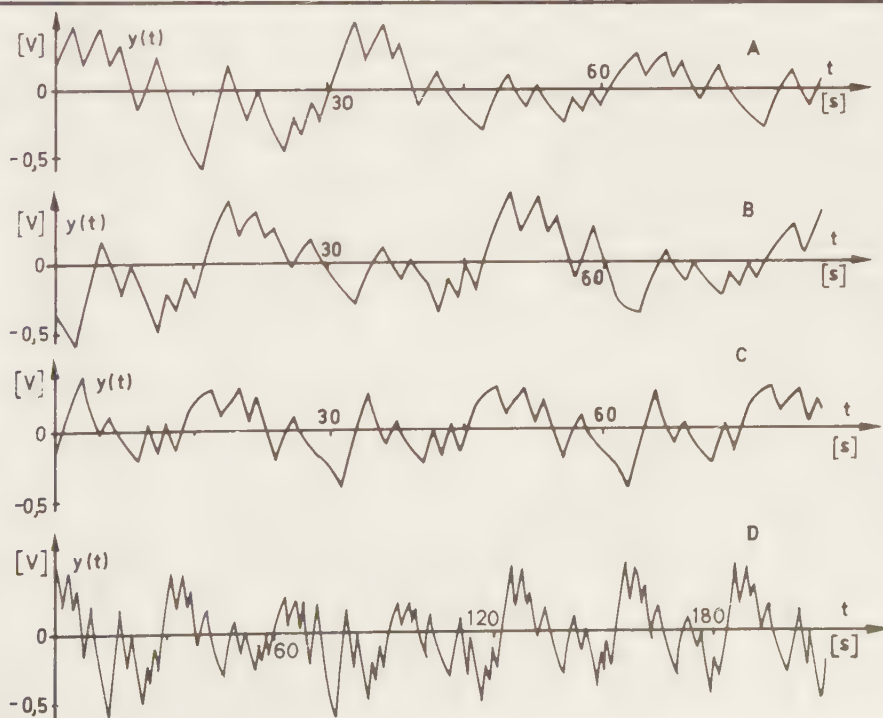


Bild 4.3:

Verlauf der Ausgangssignale $y(t)$ für die untersuchten Änderungsraten A bis D ($\lambda_S=0$)

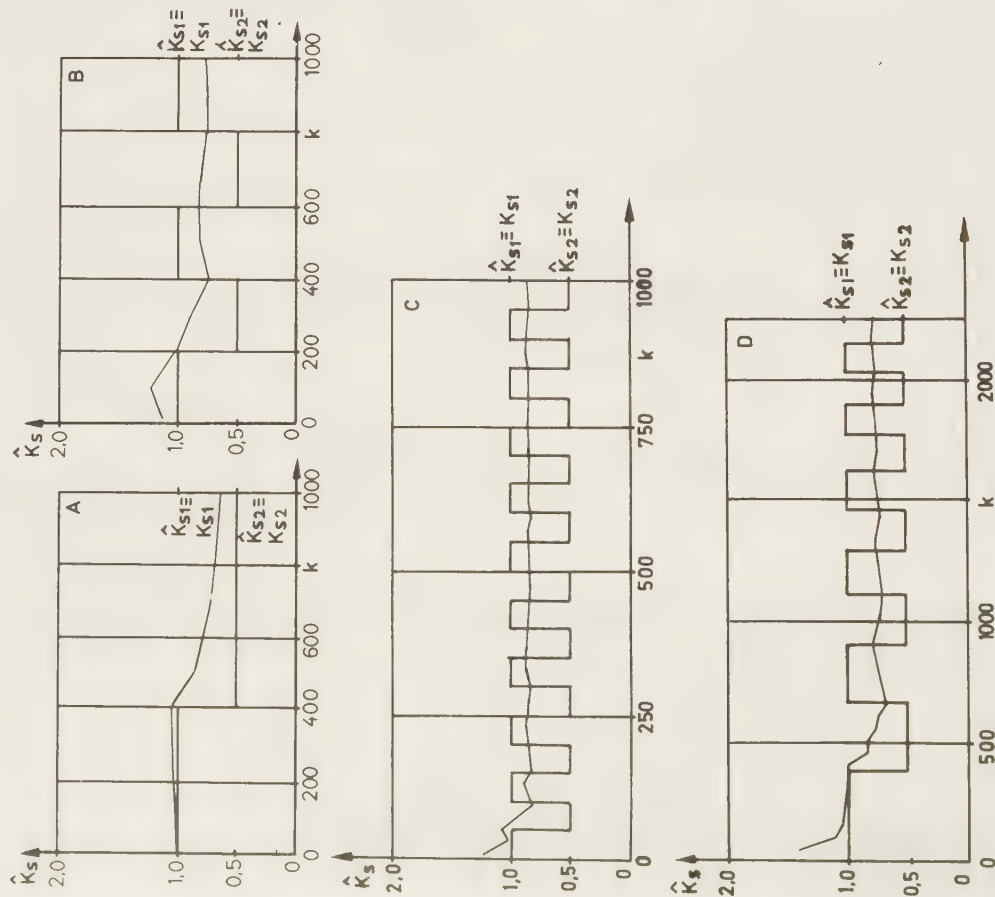


Bild 4.4: Verlauf von $\hat{K}_s$ bei Anwendung des ungewichteten IV-Algorithmus ($\lambda_s=0$)

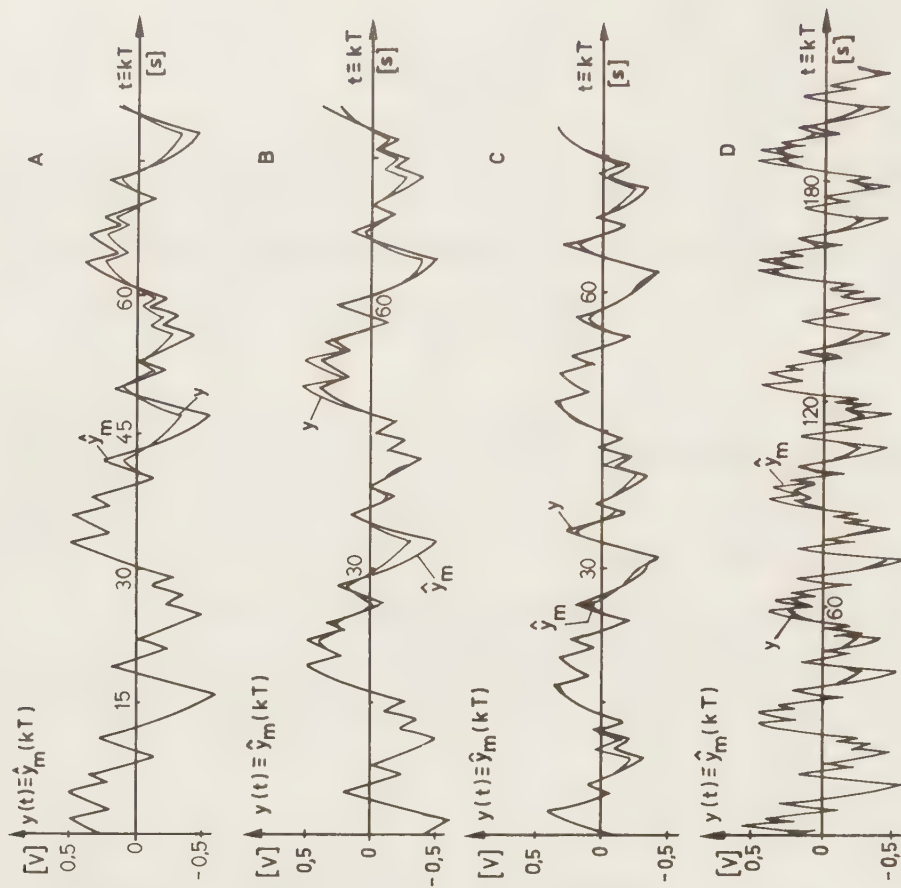


Bild 4.5: Analog gemessene und geschätzte Ausgangssignale $y(t)$ bzw. $\hat{y}_m(kT)$ bei ungewichtetem IV-Algorithmus ($\lambda_s = 0$)

faktors $\hat{K}_s$ zeigt - ebenso wie die für die 4 untersuchten Fälle A bis D ermittelten Modellausgangssignale $\hat{y}_m(kT)$ nach Bild 4.5 -, daß keine Parameteränderungen erkannt wurden, und unterstreicht somit die Notwendigkeit, modifizierte Schätzverfahren zur Identifikation zeitvarianter Systeme einzusetzen.

4.4.1 Änderungsrate A

System ohne Rauschen

Bei Änderungsrate A mit der relativ geringen Änderung $\Delta_k K_s = 5 \cdot 10^{-4}$ des Verstärkungsfaktors bezogen auf das Abtastintervall liefern alle untersuchten Verfahren bei geeigneter Wahl der zugehörigen Gewichtungsfaktoren nach Tabelle 4.3 eine sehr gute und schnelle Anpassung des Verstärkungsfaktors $\hat{K}_s$ an dessen vorgegebene Werte (Bild 4.6). Während die Verfahren G 1 bis G 3 zum Zeitpunkt der sprungförmigen Änderung bei $k = 400$ ein kurzfristiges Überschwingen aufweisen, ergibt sich bei M 3 eine asymptotische Annäherung an den neuen Wert von K_s . Vor allem bei G 1 bis G 3 läßt sich die Schnelligkeit der Anpassung durch eine verstärkte Gewichtung weitgehend erhöhen (Bild 4.6). Allerdings muß dafür ein Anwachsen der Überschwingungen in Kauf genommen werden. Im Sinne eines Kompromisses zwischen schneller Anpassung und einem vertretbaren Maß an Überschwingung können die in Bild 4.6 samt zugehörigen Gewichtungsfaktoren angegebenen Schätzwerte des Verstärkungsfaktors $\hat{K}_s$ (durchgezogene Linie) als optimal angesehen werden. Im allgemeinen wurde auf diese Weise bereits nach maximal 30 - 50 neuen Meßwerten der neue Wert von K_s erreicht.

Die Wahl der optimalen Gewichtungsfaktoren bereitet vor allem bei G 1 und G 3 mit $\rho_0 = 0,95$ bzw. $\rho = 0,08$ keine Schwierigkeiten; ebensowenig bei R, wo die Wahl von k_R als Teiler des Änderungszeitpunktes gute ($k_R = 200$), bei zu häufigem

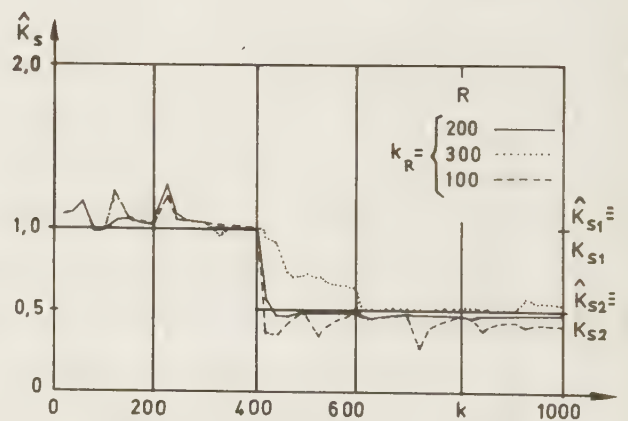
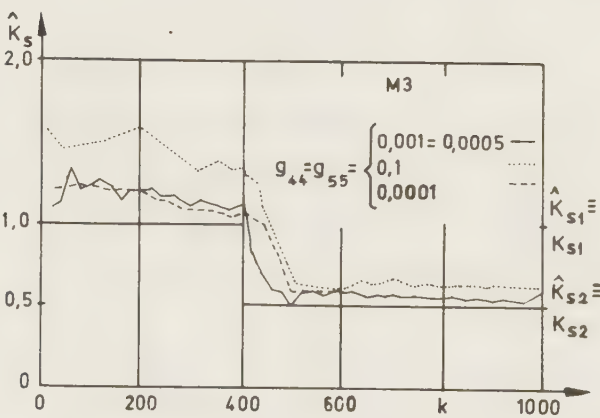
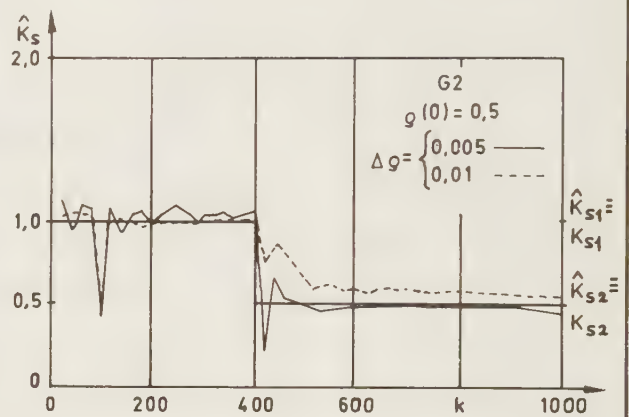
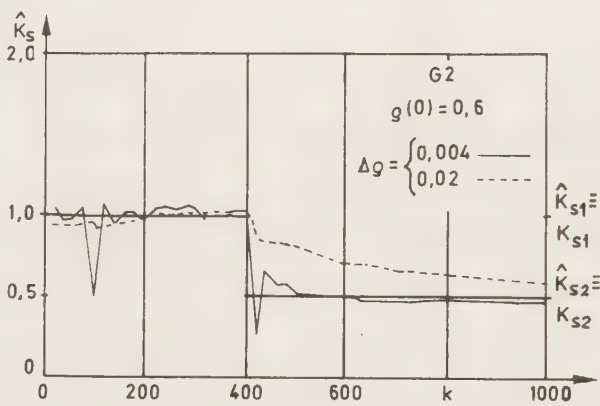
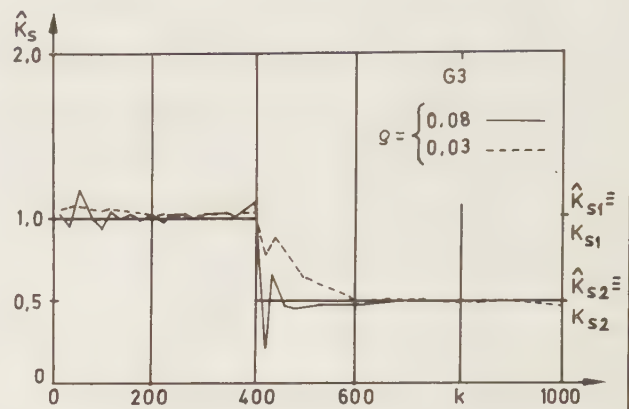
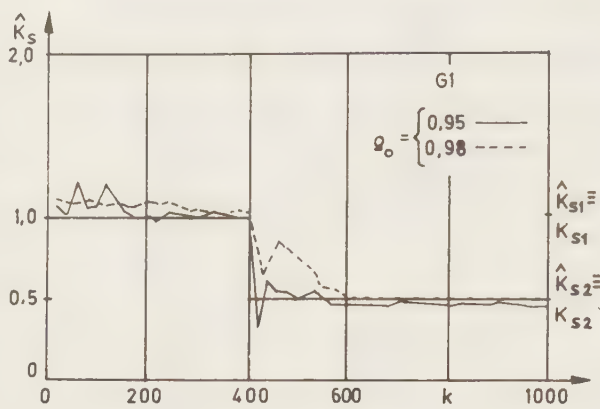


Bild 4.6: Verlauf von $\hat{K}_s$ für die 5 modifizierten Schätzverfahren bei Änderungsrate A ($\lambda_s = 0$)

Rücksetzen ($k_R = 100$) allerdings etwas unruhige Ergebnisse liefert. Stimmt der Rücksetzzeitpunkt jedoch nicht mit dem Änderungszeitpunkt der Parameter überein ($k_R = 300$), so ergibt sich eine zu langsame Anpassung von $\hat{K}_S$.

Verfahren G 2 liefert für $\rho(0) = 0,5$ bzw. $0,6$ und $\Delta\rho = 0,005$ bzw. $0,004$ zwar ebenfalls sehr gute Werte für $\hat{K}_S$ in der Umgebung des Änderungszeitpunktes, jedoch starke Überschwingungen zu Beginn der Schätzung ($k = 100$). Die Verwendung größerer $\rho(0)$ und kleinerer $\Delta\rho$ schwächt diese Schwankungen zwar ab, verschlechtert jedoch den Verlauf von $\hat{K}_S$ um den Zeitpunkt $k = 400$ ganz erheblich.

Diese relativ starke Abhängigkeit von den gewählten a priori-Werten konnte bei M 3 nicht festgestellt werden. Auf Änderungen der Gewichtungsfaktoren reagiert der Algorithmus in diesem Fall wesentlich weniger empfindlich als bei den übrigen Verfahren. So lieferten $g_{44} = g_{55} = 0,0005$ ($g_{11} = g_{22} = g_{33} = 0$) zwar optimale Werte für $\hat{K}_S$; diese ließen sich jedoch näherungsweise auch mit den um den Faktor 2 abgeänderten Werten $0,001$ erzielen.

Darüberhinaus bestätigte sich bei M 3 die Zuordnung zwischen den Hauptdiagonalelementen g_{ii} ($i=1,2,\dots,5$) der Matrix $\underline{G}^*$ und den Elementen des Parametervektors $\underline{p}$: Um eine gute Anpassung von $\hat{K}_S$ zu erhalten, genügt es, die den veränderten Parametern b_1 und b_2 entsprechenden Elemente g_{44} und g_{55} von $\underline{G}^*$ geeignet zu wählen. Die Verwendung aller Elemente g_{ii} verschlechtert die Schätzung jedoch nicht.

Die zur besseren Beurteilung der Ergebnisse in Bild 4.7 angegebenen Übergangsfunktionen $\hat{h}_m(kT)$ bestätigen die bereits im Zusammenhang mit $\hat{K}_S$ gemachten Aussagen. Während zum Zeitpunkt $k = 400$ $h_1(t)$ in allen Fällen recht gut approximiert wird, ergibt sich bei allen untersuchten Verfahren mit Ausnahme von G 1 bereits bei $k = 440$ eine gute Annäherung an die neue Übergangsfunktion $h_2(t)$, sofern jeweils die angegebenen optimalen a priori-Werte eingesetzt werden.

Auch die zusätzlich berechneten Modellausgangssignale $\hat{y}_m(kT)$ stimmen für die in Tabelle 4.3 angegebenen Gewichtungsfaktoren

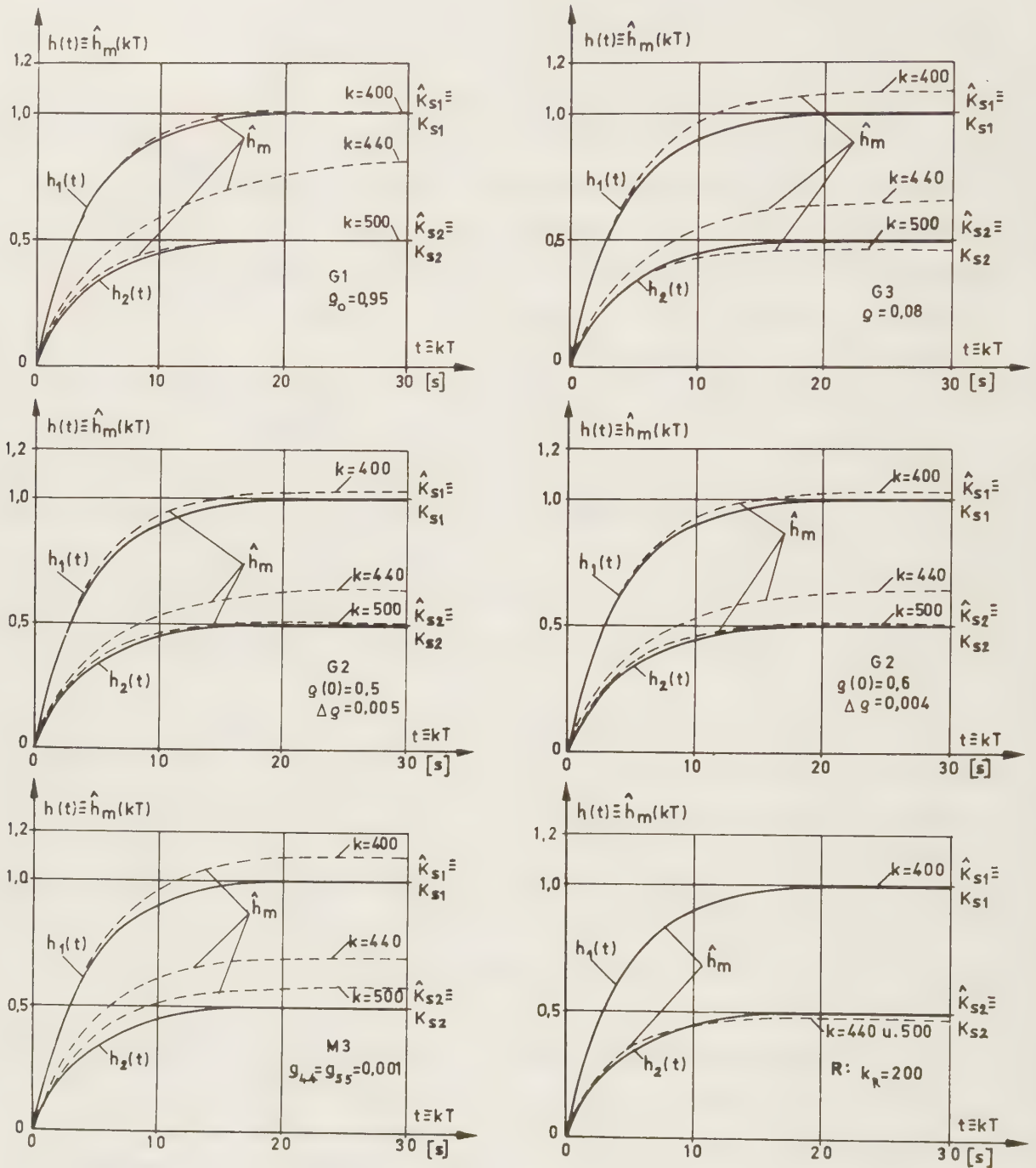


Bild 4.7: Verlauf der mit den modifizierten Schätzverfahren ermittelten Übergangsfunktionen $\hat{h}_m(kT)$ bei Änderungsrate A ($\lambda_s = 0$)

gut mit dem direkt gemessenen Ausgangssignal $y(t)$ überein (Bild 4.8). Um jedoch eine exakte Übereinstimmung zu erzielen, müssen bei den Verfahren G 1, G 2 und M 3 die in Bild 4.8 angegebenen etwas stärkeren Gewichtungen verwendet werden.

Insgesamt kann festgestellt werden, daß sich bei geeignet gewählten a priori-Werten eine sehr gute Parameterschätzung im Fall von Änderungsrate A bei einem System ohne Rauschen erzielen läßt.

System mit Rauschen ($\lambda_s = 0,1$):

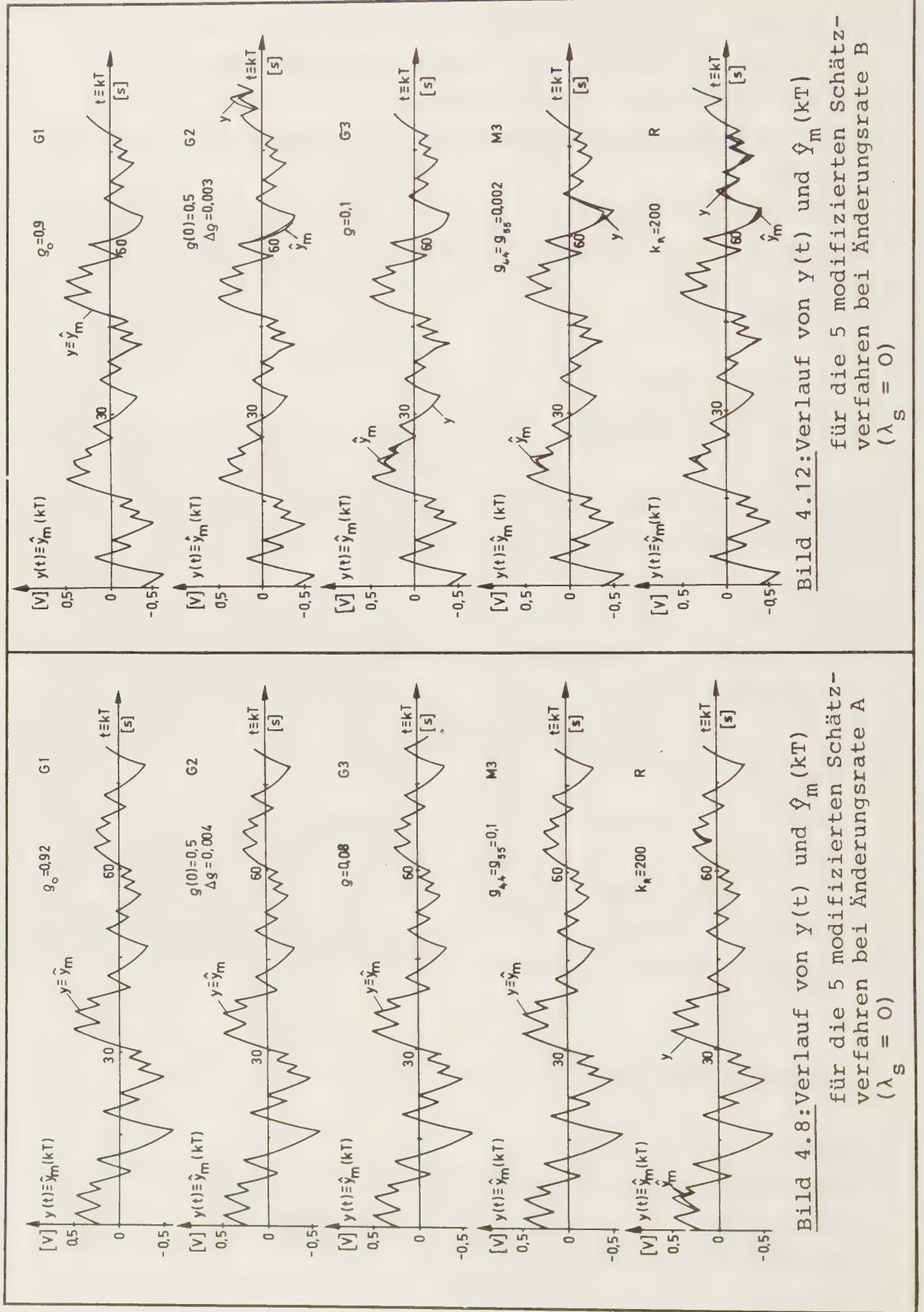
Im Fall eines dem Systemausgangssignal zusätzlich überlagerten Rauschsignals wurden lediglich diejenigen Verfahren zur Identifikation der veränderlichen Parameter eingesetzt, die bereits ohne Rauschen die zuverlässigsten Ergebnisse geliefert haben, nämlich G 1, G 3 und M 3. In allen 3 Fällen ergibt sich nach Bild 4.9 eine gute und schnelle, infolge des zusätzlichen Rauschanteils allerdings etwas unruhige Anpassung des Verstärkungsfaktors $\hat{K}_s$. Besonders bei M 3 wird bereits nach 50 neuen Meßwerten der neue Verstärkungsfaktor K_{s2} erreicht, während G 1 und G 3 dazu wesentlich mehr Werte benötigen.

Zur Erzielung dieser guten Parameternachführung bei einem Störpegel von $\lambda_s = 0,1$ müssen jedoch die in Tabelle 4.3 bzw. Bild 4.9 angegebenen, wesentlich schwächeren Gewichtungen gewählt und deshalb im allgemeinen eine langsamere Anpassung als im Fall ohne Rauschen in Kauf genommen werden.

4.4.2 Änderungsrate B

System ohne Rauschen:

Bei Änderungsrate B liefern wiederum alle 5 untersuchten modifizierten Schätzverfahren nach Bild 4.10 eine sehr gute Anpassung des Verstärkungsfaktors $\hat{K}_s$ an die vorgegebenen Werte K_{s1} und K_{s2} . Bereits nach 20 - 60 neuen Meßwerten wer-



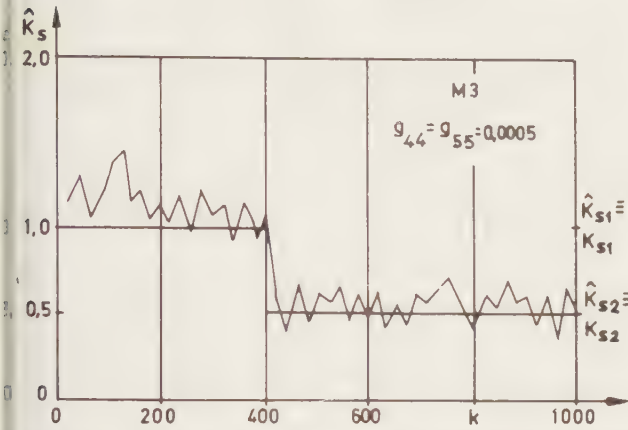
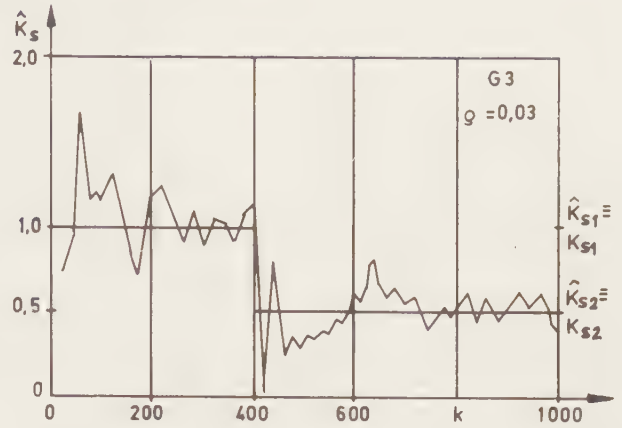
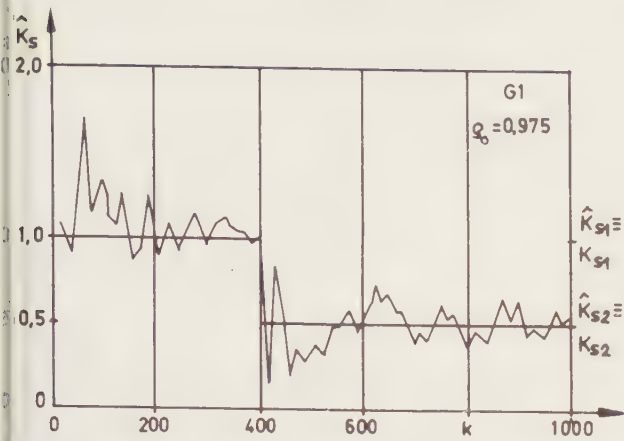


Bild 4.9:

Verlauf von $\hat{K}_s$ für die
modifizierte Verfahren
G 1, G 3 und M 3 bei
Änderungsrate A ($\lambda_s = 0,1$)

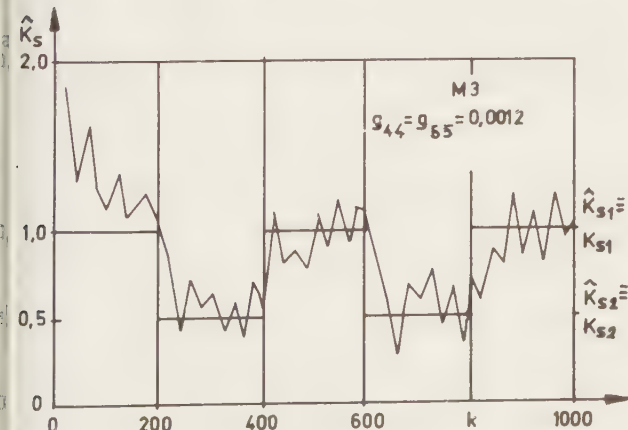
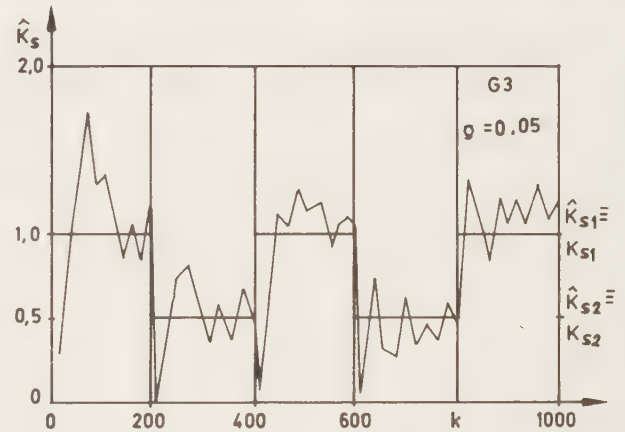
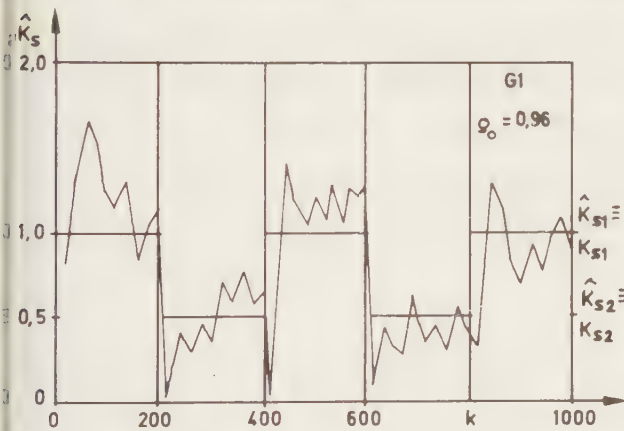


Bild 4.13:

Verlauf von $\hat{K}_s$ für die
modifizierte Verfahren
G 1, G 3 und M 3 bei
Änderungsrate B ($\lambda_s = 0,1$)

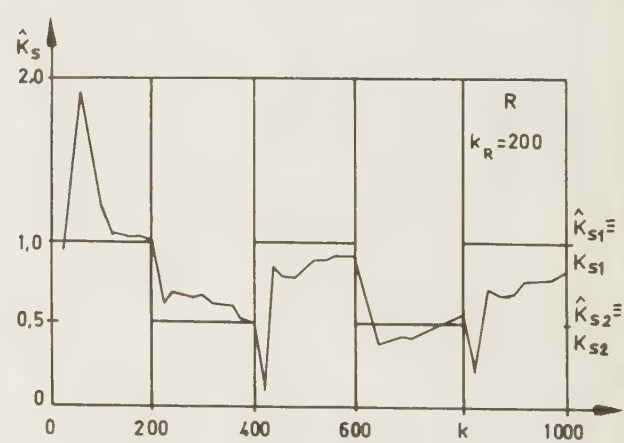
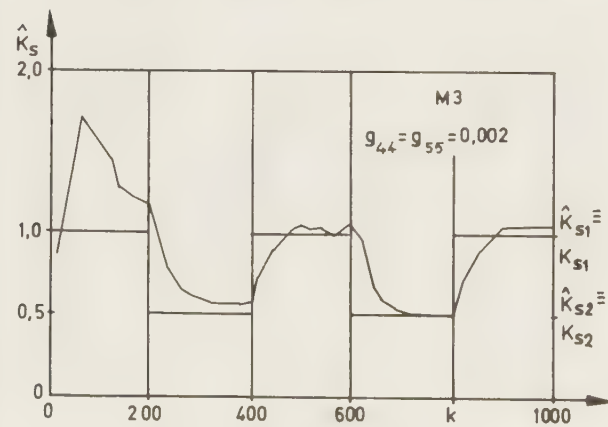
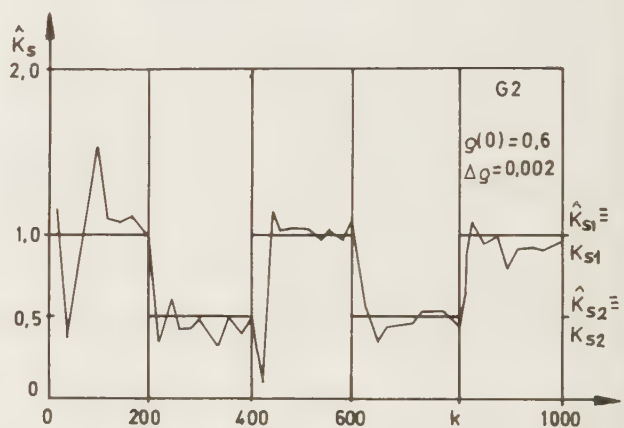
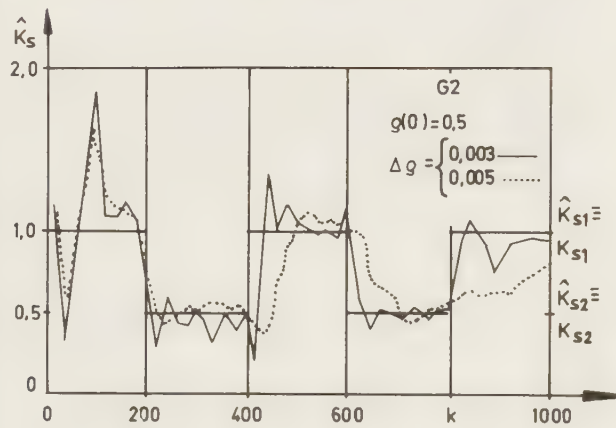
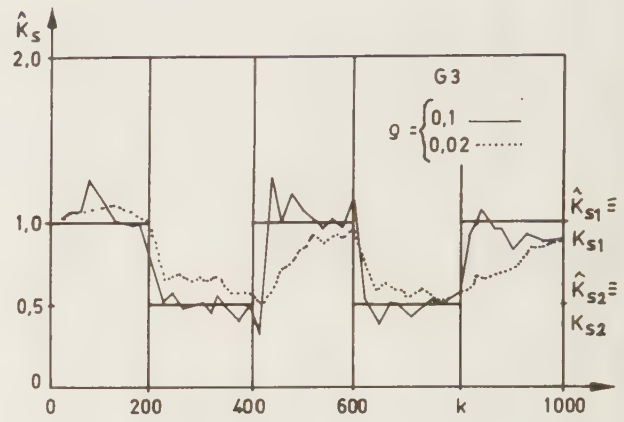
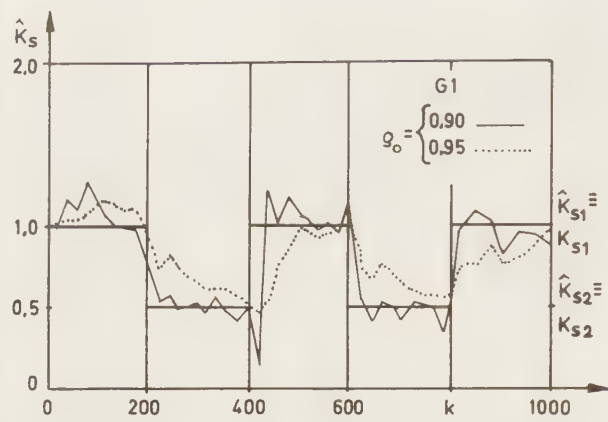


Bild 4.10: Verlauf von $\hat{K}_s$ für die 5 modifizierten Schätzverfahren bei Änderungsrate B ($\lambda_s = 0$)

den in jedem Fall bei geeigneter Wahl der Gewichtungsfaktoren nach Tabelle 4.3 die jeweils neuen Werte von K_s erreicht. Dabei müssen wegen der höheren Änderungsgeschwindigkeit der Parameter bei allen Verfahren stärkere Gewichtungen als bei Änderungsrate A ($\lambda_s = 0$) eingesetzt werden. Die starken Überschwingungen zu den Änderungszeitpunkten sowie zu Beginn der Schätzung konzentrieren sich bei dieser Änderungsrate vor allem auf die Verfahren G 2 und R, während G 1, G 3 und M 3 eine sehr gute Modellnachführung ohne starke Schwankungen liefern. Dabei ist interessant, daß bei M 3 unabhängig von der Wahl der Werte g_{44} und g_{55} immer eine asymptotische Anpassung von $\hat{K}_s$ erfolgt, und somit immer ein gewisses "Nachhinken" der Schätzwerte in Kauf genommen werden muß, während alle übrigen Verfahren bei den Änderungszeitpunkten eher zum Überschwingen neigen.

Die bei Änderungsrate B mit den optimalen Gewichtungsfaktoren erhaltenen guten Ergebnisse werden durch die in Bild 4.11 dargestellten geschätzten Übergangsfunktionen $\hat{h}_m(kT)$ bestätigt, während zur Erzielung einer exakten Übereinstimmung zwischen dem gemessenen Ausgangssignal $y(t)$ und den jeweiligen Modellausgangssignalen $\hat{y}_m(kT)$ nach Bild 4.12 eher etwas stärkere Gewichtungen hätten verwendet werden sollen.

System mit Rauschen ($\lambda_s = 0,1$):

Auch im Fall eines zusätzlichen Rauschanteils im Ausgangssignal liefern die Verfahren G 1, G 3 und M 3 nach Bild 4.13 eine sehr gute und schnelle, allerdings etwas unruhige Anpassung des Verstärkungsfaktors $\hat{K}_s$. Dabei neigen vor allem G 1 und G 3 zu stärkeren Überschwingungen in der Nähe der Änderungszeitpunkte, während M 3 auch in diesem Fall eine asymptotische Annäherung an K_s liefert. Wie bei Änderungsrate A müssen auch hier infolge des Rauschanteils schwächere Gewichtungen verwendet und somit eine etwas langsamere Anpassung als im Fall ohne Rauschen in Kauf genommen werden.

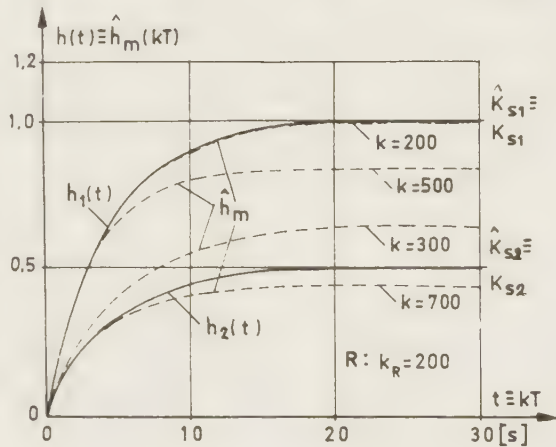
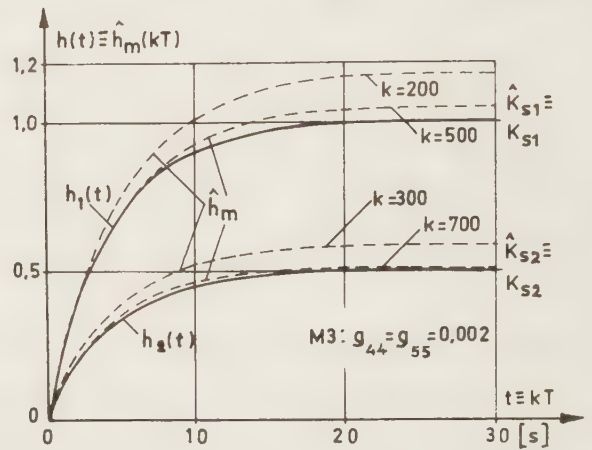
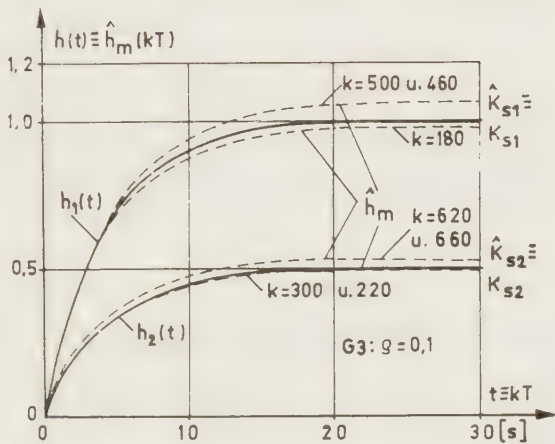
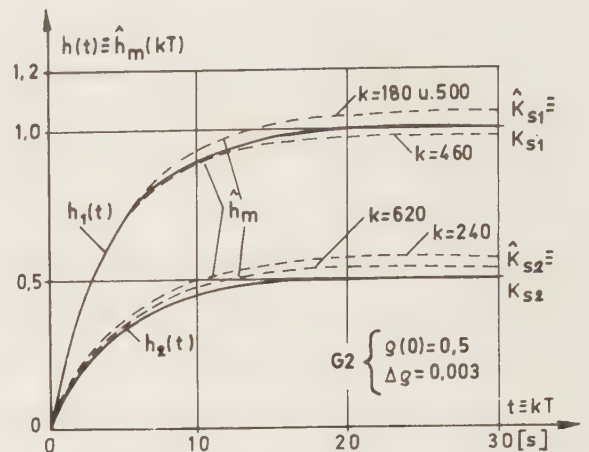
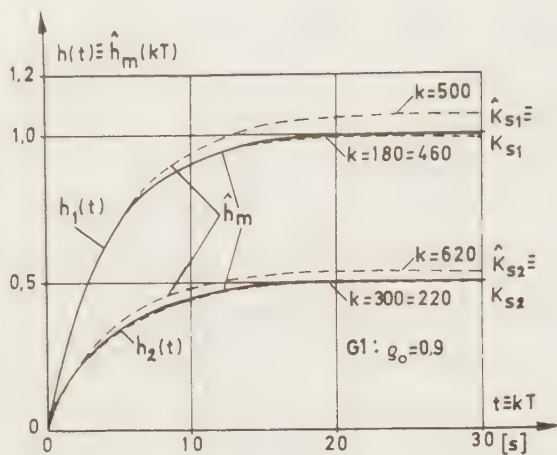


Bild 4.11:

Verlauf der mit den modifizierten Schätzverfahren ermittelten Übergangsfunktionen $\hat{h}_m(kT)$ bei Änderungsrate B ($\lambda_s = 0$)

4.4.3 Änderungsrate C

System ohne Rauschen:

Die Änderungsrate C weist mit $\Delta_k K_s = 9,5 \cdot 10^{-3}$ eine Änderungsgeschwindigkeit des Verstärkungsfaktors auf, bei der die meisten der untersuchten Verfahren die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit erreichen. Zwar werden bei geeigneter Wahl der a priori-Werte die vorgegebenen Änderungen des Verstärkungsfaktors nach Bild 4.14 noch erkannt, doch ist die Anpassung bei G 1, G 2, G 3 und R von starken Schwankungen und Überschwingungen begleitet, während sich bei M 3 erst nach einer gewissen Anlaufzeit wiederum für einen sehr breiten Optimalbereich der Faktoren g_{ii} ($i = 4, 5$) brauchbare Schätzwerte - dafür allerdings ohne Schwankungen - ergeben. In diesem Zusammenhang wird auch noch einmal ganz deutlich, daß mit dem Verfahren R eine gute Anpassung von $\hat{K}_s$ nur dann erreicht werden kann, wenn k_R als Teiler der Änderungszeitpunkte der Parameter gewählt wird.

Wegen der höheren Änderungsgeschwindigkeit der Parameter müssen in diesem Fall nach Tabelle 4.3 wiederum stärkere Gewichtungen als bei Änderungsrate B ($\lambda_s = 0$) eingesetzt werden, um die in Bild 4.14 dargestellten Schätzwerte ermitteln zu können. Trotz der gerade noch zufriedenstellenden Ergebnisse in bezug auf $\hat{K}_s$ erhält man jedoch - außer bei Verfahren R - eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem direkt gemessenen und den geschätzten Ausgangssignalen nach Bild 4.15, die bei M 3 allerdings nur unter Verwendung einer im Vergleich zu Bild 4.14 erheblich verstärkten Gewichtung erzielt werden kann.

System mit Rauschen ($\lambda_s = 0,1$)

Auch bei einem zusätzlichen Rauschanteil im Systemausgang erhält man mit den in Tabelle 4.3 angegebenen, gegenüber dem Fall ohne Rauschen wiederum abgeschwächten Gewichtungen vor allem für M 3 noch brauchbare Schätzwerte $\hat{K}_s$ (Bild 4.16). Die Anpassung von $\hat{K}_s$ zeigt sich bei diesem Verfahren gegen-

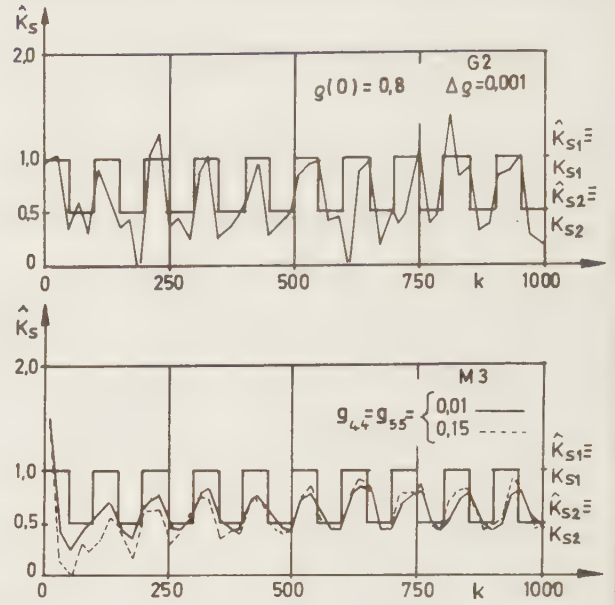
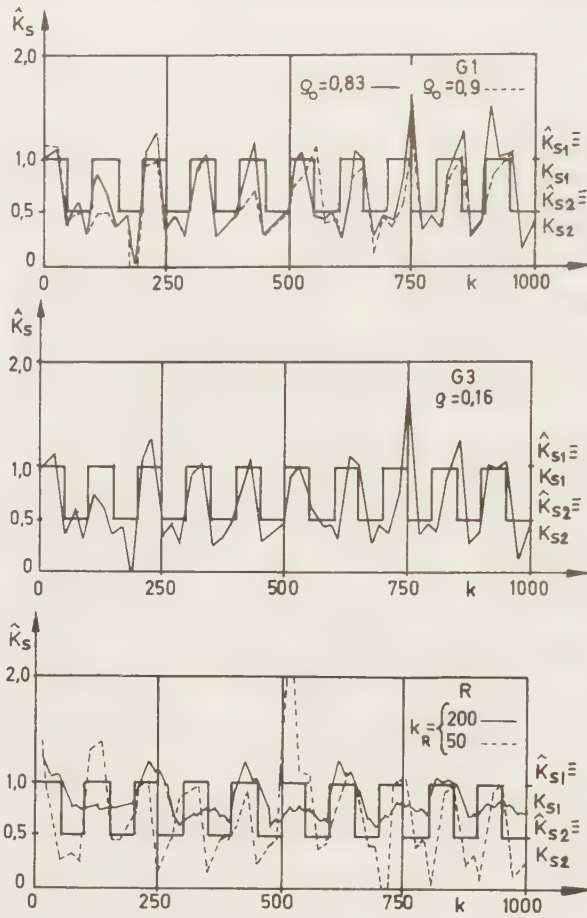


Bild 4.14:

Verlauf von $\hat{K}_S$ für die 5 modifizierten Schätzverfahren bei Änderungsrate C ($\lambda_S = 0$)

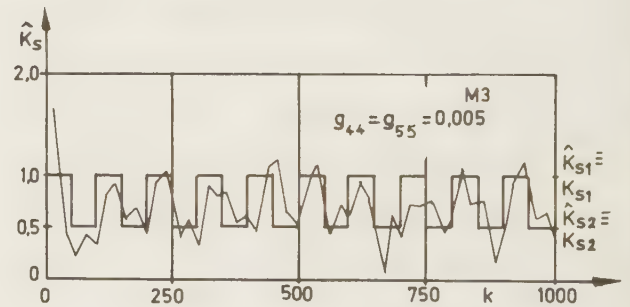
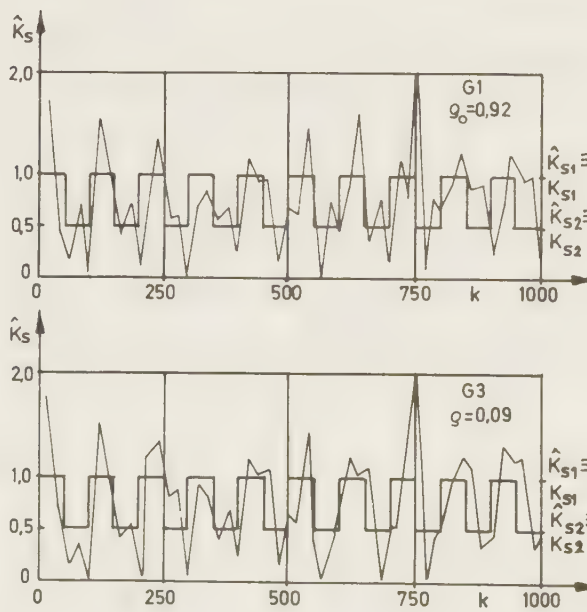


Bild 4.16:

Verlauf von $\hat{K}_S$ für die modifizierten Verfahren G 1, G 3 und M 3 bei Änderungsrate C ($\lambda_S = 0,1$)

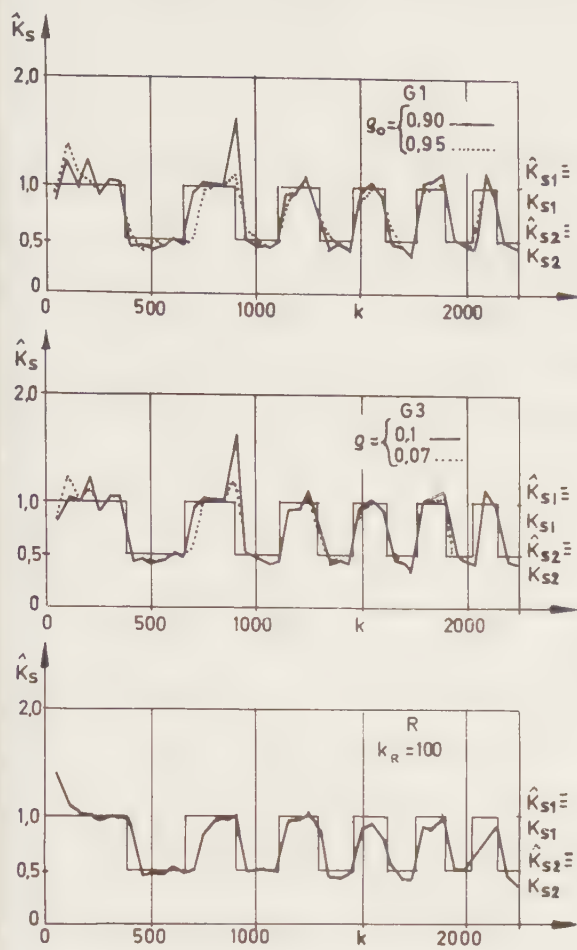


Bild 4.17: Verlauf von $\hat{K}_s$ für die 5 modifizierten Schätzverfahren bei Änderungsrate D ($\lambda_s = 0$)

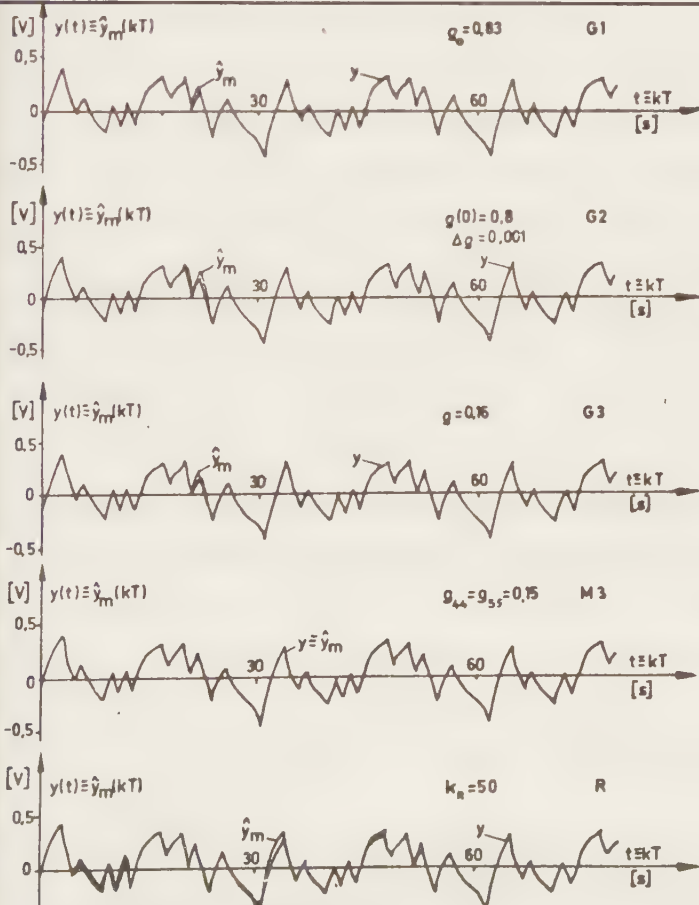


Bild 4.15: Verlauf von $y(t)$ und $\hat{y}_m(kT)$ für die 5 modifizierten Schätzverfahren bei Änderungsrate C ($\lambda_s = 0$)

über dem Fall ohne Rauschen sogar verbessert; allerdings ist der Verlauf von $\hat{K}_s$ wesentlich unruhiger. Bei G 1 und G 3 treten die bekannten Überschwingungen in verstärktem Maße auf, jedoch sind auch diese beiden Verfahren noch in der Lage, bei Änderungsrate C und einem Störpegel von $\lambda_s = 0,1$ eine einigermaßen zufriedenstellende Anpassung der Parameter zu erreichen.

4.4.4 Änderungsrate D

Während bisher nur einmalige (Änderungsrate A) bzw. periodische Änderungen (Änderungsraten B, C) der Parameter überprüft wurden, soll mit Änderungsrate D untersucht werden, inwieweit auch Systeme bei zunehmender Zahl der Parameteränderungen pro Zeitintervall mit Hilfe der modifizierten Schätzverfahren identifiziert werden können. Bei dieser Untersuchung wurden wiederum alle 5 modifizierten Verfahren an dem bekannten System 2. Ordnung ohne Rauschen eingesetzt. Wie Bild 4.17 zeigt, ergibt sich in allen Fällen eine sehr gute Anpassung von $\hat{K}_s$ an die vorgegebenen Werte K_{s1} bzw. K_{s2} für die dort und in Tabelle 4.3 angegebenen optimalen a priori-Werte, die bis auf R und G 2 fast vollständig mit den bei Änderungsrate B gewählten Gewichtungsfaktoren übereinstimmen. Diese Übereinstimmung läßt sich leicht mit der Änderungsgeschwindigkeit $\Delta_k K_s = 2,4 \cdot 10^{-3}$ des Verstärkungsfaktors erklären, die ziemlich genau dem Wert $\Delta_k K_s = 2 \cdot 10^{-3}$ für Änderungsrate B entspricht. Es ist also auch bei einer zunehmenden Häufigkeit der Parameteränderungen möglich, durch geeignete Wahl der Gewichtungsfaktoren sehr gute Identifikationsergebnisse zu erzielen.

4.4.5 Diskussion der Ergebnisse

Von den für die 4 untersuchten Änderungsraten A bis D eingesetzten 5 modifizierten Schätzverfahren G 1 bis G 3, M 3

und R lieferten vor allem die Verfahren G 1, G 3 und M 3 bei einer relativ problemlosen Wahl der zugehörigen Gewichtungsfaktoren ρ_0 , ρ und g_{44} bzw. g_{55} auch im Fall eines zusätzlich aufgeschalteten Rauschsignals ($\lambda_s = 0,1$) die besten Identifikationsergebnisse.

Eine gute Parameternachführung kann auch mit dem Verfahren R im Fall ohne Rauschen erzielt werden, während sich bei $\lambda_s = 0,1$ - ebenso wie bei einem zu häufigen Rücksetzen der Matrix $\underline{P}$ - recht unruhige Parameterschätzwerte ergeben. Zu seltenes Rücksetzen liefert eine bis zum nächsten Rücksetzzeitpunkt verzögerte Anpassung der Parameter. Eine optimale Anpassung erhält man allerdings nur, wenn $\underline{P}$ jeweils zu den Änderungszeitpunkten der Parameter zurückgesetzt wird. Da diese in der Praxis jedoch nicht bekannt sind, ist das Haupteinsatzgebiet von R nicht die exakte Parameternachführung, sondern die grobe Ermittlung der Änderungsgeschwindigkeit der Parameter durch Testläufe mit unterschiedlichen Rücksetzzeitpunkten (siehe Abschnitt 4.5.3).

Bei Verfahren G 2 macht es die Vielzahl der Möglichkeiten zur Wahl der Faktoren $\rho(0)$ und $\Delta\rho$ nicht leicht, eine Kombination dieser Werte zu finden, die sowohl eine gute Anpassung der Parameter in der Nähe der Änderungszeitpunkte liefert, als auch starke Schwankungen zu Beginn der Schätzung vermeidet. In den meisten Fällen ist es deshalb vorzuziehen, die Verfahren G 1, G 3 oder M 3 einzusetzen, die neben einer einfacheren Wahl der Gewichtungsfaktoren auch eine größere Leistungsfähigkeit als G 2 aufweisen.

Während die Verfahren G 1 bis G 3 und R im allgemeinen zu Überschwingungen in der Nähe der Änderungszeitpunkte neigen, liefert allein M 3 in allen untersuchten Fällen eine asymptotische Anpassung. Nicht zuletzt deshalb zeigte sich M 3 besser zur Identifikation von Strecken mit hohen Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter geeignet als die übrigen Verfahren.

Ein zusätzlicher Unterschied zwischen M 3 und den anderen Verfahren besteht zudem in der relativ geringen Empfindlich-

keit des mit M 3 modifizierten Schätzalgorithmus gegenüber Änderungen der Gewichtungsfaktoren g_{ii} ($i = 4,5$). Während bei den Verfahren G 1 bis G 3 kleine Änderungen der a priori-Werte bereits starke Unterschiede im Konvergenzverhalten zur Folge haben, ergibt sich bei M 3 ein relativ breiter Optimalbereich für die Gewichtungsfaktoren. Darüberhinaus bestätigte sich bei M 3 vor allem auch die Zuordnung zwischen den Elementen von $\underline{G}^*$ und $\underline{p}$, die lediglich den Einsatz der veränderlichen Parametern b_i ($i = 1,2$) entsprechenden a priori-Werte g_{ii} ($i = 4,5$) erforderlich macht. Wichtig ist jedoch, daß auch bei Verwendung aller Hauptdiagonalelemente g_{ii} von $\underline{G}^*$ brauchbare Ergebnisse erzielt werden können.

Die Wahl der Gewichtungsfaktoren für die modifizierten Verfahren wird für ein zu identifizierendes Regelsystem mit veränderlichen Parametern im allgemeinen bestimmt durch

- die gewünschte Geschwindigkeit der Anpassung,
- die Änderungsgeschwindigkeit der Parameter und
- den Anteil des Rauschsignals im Systemausgang, also das Stör-Nutzsignal-Verhältnis (λ_s).

Während eine höhere Änderungsgeschwindigkeit eine stärkere Gewichtung erfordert, muß bei Anwachsen des Störpegels λ_s diese Gewichtung verringert werden, um starke Schwankungen im Verlauf der Schätzwerte zu vermeiden. In Kenntnis dieser Tatsachen wird nun im folgenden Kapitel versucht, mit Hilfe der in diesem Abschnitt dargestellten Identifikationsergebnisse einen detaillierten Zusammenhang zwischen den Gewichtungsfaktoren, der Änderungsgeschwindigkeit und dem Störpegel λ_s für die Verfahren G 1, G 3 und M 3 anzugeben, um darauf aufbauend Kriterien zur Wahl optimaler a priori-Werte für diese Verfahren aufstellen zu können.

4.5 Richtlinien zur Wahl optimaler Gewichtungsfaktoren

4.5.1 Verfahren G 1 und G 3

Um bei den Verfahren G 1 und G 3 eine Vorschrift zur Wahl der Gewichtungsfaktoren ρ_0 bzw. ρ ermitteln zu können, wurde zunächst versucht, einen Zusammenhang zwischen den optimalen a priori-Werten nach Tabelle 4.3 und der Änderungsgeschwindigkeit $\Delta_k K_s$ des Verstärkungsfaktors anzugeben. Bild 4.18 zeigt diese Zuordnung für die beiden Störpegel $\lambda_s = 0$ und $0,1$. In Form einer mathematischen Gleichung erhält man daraus die Beziehungen

$$\rho_0 = 1 - c \sqrt{\Delta_k K_s} \quad (4.33)$$

für G 1 und

$$\rho = c \sqrt{\Delta_k K_s} \quad (4.34)$$

für G 3, wobei für das zugrunde liegende Regelsystem 2. Ordnung (Prozeß 1) die Werte $c = 2,2$ für $\lambda_s = 0$ und $c = 1$ für $\lambda_s = 0,1$ ermittelt wurden.

Durch einige Kontrollmessungen mit dem Störpegel $\lambda_s = 0,05$ ergab sich schließlich noch der Wert $c = 1,3$ und somit der in Bild 4.19 dargestellte Zusammenhang zwischen der Konstanten c und dem Störpegel λ_s , der durch die Beziehung

$$c = c_0 - c_1 \sqrt{\lambda_s} \quad (4.35)$$

mit $c_0 = 2,2$ und $c_1 = 3,8$ beschrieben werden kann. Setzt man voraus, daß $\lambda_s = 0,2$ der maximale Störpegel ist, für den an Systemen mit veränderlichen Parametern noch brauchbare Ergebnisse erzielt werden können, so erhält man schließlich mit Gl. (4.35) und Gl. (4.33) bzw. (4.34) die Beziehungen

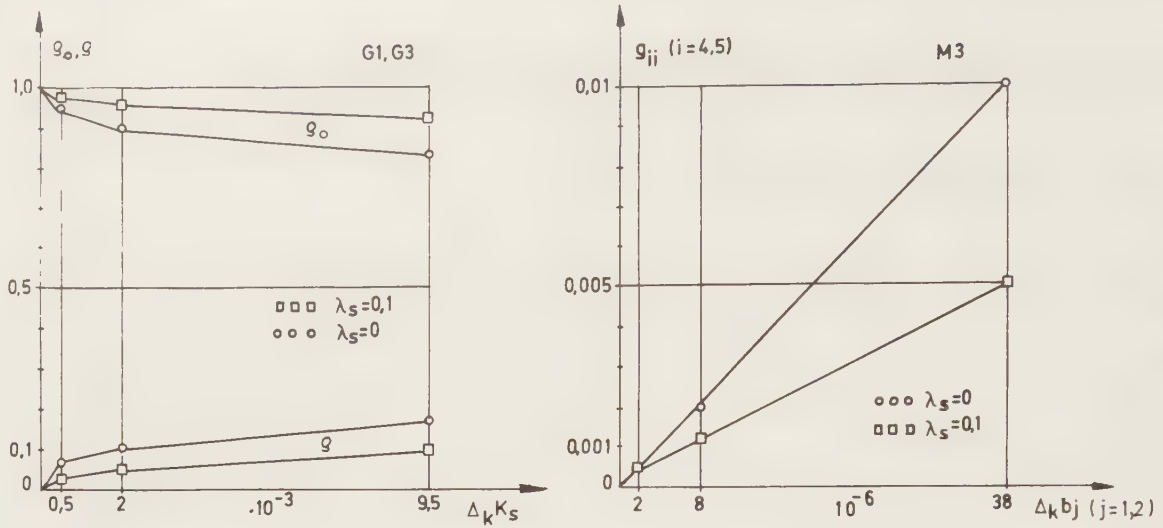


Bild 4.18: Zusammenhang zwischen den optimalen Gewichts-faktoren für G 1, G 3 und M 3 und der Ände-rungsgeschwindigkeit $\Delta_k K_s$ bzw. $\Delta_k b_j$ ($j=1,2$)

nach Tabelle 4.2, Seite 81.

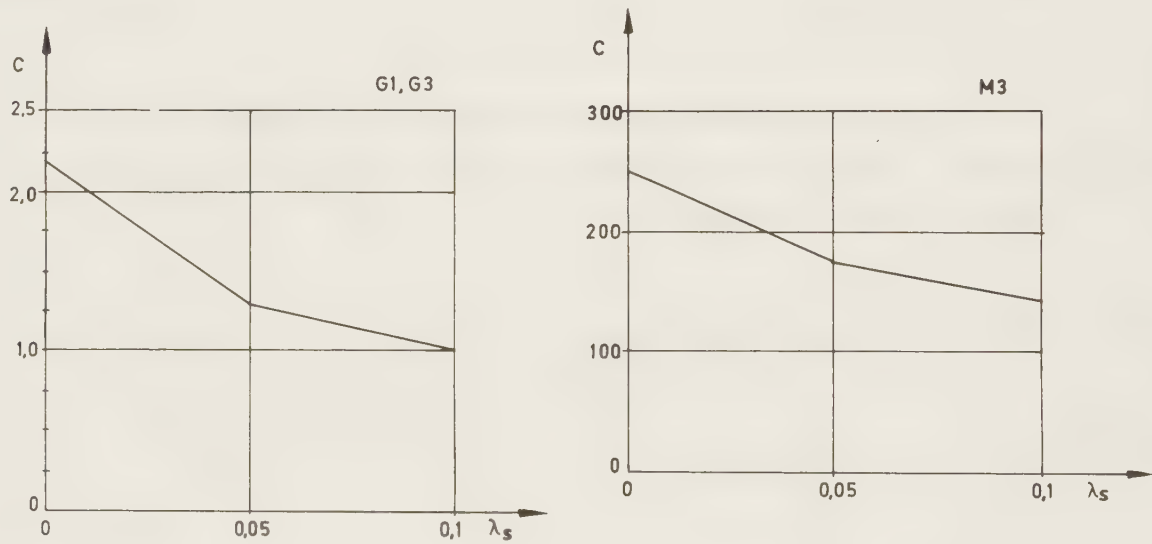


Bild 4.19: Zusammenhang zwischen der Konstanten c und dem Störpegel λ_s für die modifizierten Ver-fahren G 1, G 3 und M 3

$$\rho_0 = 1 - \sqrt{\Delta_k K_s} (c_0 - c_1 \sqrt{\lambda_s}), \lambda_s \leq 0,2 \quad (4.36)$$

für G 1 und

$$\rho = \sqrt{\Delta_k K_s} (c_0 - c_1 \sqrt{\lambda_s}), \lambda_s \leq 0,2 \quad (4.37)$$

für G 3.

Die noch frei wählbaren Konstanten c_0 und c_1 hängen dabei in erster Linie vom untersuchten System und von der gewünschten Schnelligkeit der Anpassung ab und müssen im jeweiligen Anwendungsfall individuell gewählt werden. In der Praxis ist es sinnvoll, die für Prozeß 1 ermittelten Werte $c_0 = 2,2$ und $c_1 = 3,8$ als Grundlage zu verwenden und sich auf diese Weise mit Gl. (4.36) bzw. (4.37) Rohwerte für ρ_0 bzw. ρ zu beschaffen, die dann an das jeweils vorliegende System angepaßt werden müssen.

Eine erste Bestätigung dieser Zusammenhänge liefert [44]. Die dort auf empirischem Wege als optimal ermittelten Gewichtungsfaktoren für G 1 lassen sich mit Hilfe der hier vorgeschlagenen Vorgehensweise (Gl. (4.36) und $c_0 = 2,2$ bzw. $c_1 = 3,8$) ohne den dort nötigen Versuchsaufwand direkt und exakt ermitteln.

4.5.2 Verfahren M 3

Wie schon bei den Verfahren G 1 und G 3 wurde auch im Fall M 3, wo eine direkte Zuordnung zwischen den Gewichtungsfaktoren und den entsprechenden Elementen des Parametervektors $\underline{p}$ besteht, versucht, zunächst einen Zusammenhang zwischen diesen a priori-Werten g_{ii} ($i = 4,5$) nach Tabelle 4.3 und der Änderungsgeschwindigkeit $\Delta_k b_i$ ($i = 1,2$) der Parameter zu ermitteln. Dieser Zusammenhang aufgrund der Identifikationsergebnisse an Prozeß 1, der im Bild 4.18 dargestellt ist, läßt sich durch die Beziehung

$$g_{ii} = c \cdot \Delta_k b_j \quad (i = 4,5; j = 1,2) \quad (4.38)$$

mit $c = 260$ für $\lambda_s = 0$ und $c = 140$ für $\lambda_s = 0,1$ angeben. Kontrollmessungen mit dem Störpegel $\lambda_s = 0,05$ lieferten schließlich noch den Wert $c = 175$ und damit den in Bild 4.19 dargestellten Zusammenhang zwischen der Konstanten c und dem Störpegel λ_s , der durch die Beziehung

$$c = c_0 - c_1 \sqrt{\lambda_s} \quad (4.39)$$

mit $c_0 = 260$ und $c_1 = 380$ beschrieben werden kann. Setzt man wiederum $\lambda_s = 0,2$ als maximalen Störpegel voraus, so erhält man schließlich mit Gln. (4.38) und (4.39) die Beziehung

$$g_{ii} = \Delta_k b_j (c_0 - c_1 \sqrt{\lambda_s}), \quad \lambda_s \leq 0,2 \quad (4.40)$$

$$(i = 4,5; j = 1,2),$$

die die Abhängigkeit der Gewichtungsfaktoren g_{ii} ($i = 4,5$) vom Störpegel und von der Änderungsgeschwindigkeit der Parameter angibt. Die noch frei wählbaren Konstanten c_0 und c_1 hängen dabei in erster Linie vom untersuchten System und von der gewünschten Schnelligkeit der Anpassung ab und müssen im jeweiligen Anwendungsfall individuell gewählt werden, wobei sinnvollerweise die in der vorliegenden Arbeit ermittelten Werte $c_0 = 260$ und $c_1 = 380$ als Rohwerte verwendet werden.

Zur besseren Übersicht über die untersuchten modifizierten Schätzverfahren sind deren wesentliche Eigenschaften in bezug auf die Güte der Anpassung und die Wahl der Gewichtungsfaktoren noch einmal abschließend in Tabelle 4.4 zusammengefaßt.

4.5.3 Ein Konzept zur Identifikation zeitvarianter Systeme

Um bei der Identifikation zeitvarianter Regelsysteme eine optimale Anpassung der Schätzwerte an den tatsächlichen Verlauf der Parameter zu erhalten, sind die in den Gln. (4.36), (4.37)

	Störpegel	Änderungsrate	Modifizierte Verfahren				
			$G1(\rho_0)$	$G2(\rho_0/\Delta\rho)$	$G3(\rho)$	$M3(q_{44} = q_{55})$	$R(k_R)$
optimale a priori-Werte	$\lambda_s = 0$	A	0,95	0,5/0,005 0,6/0,004	0,06 - 0,08	0,0005 - 0,001	200
		B	0,9	0,5/0,003 0,6/0,002	0,1	0,002	200
		C	0,83	0,8/0,001	0,16 - 0,18	0,01	50
		D	0,9	0,8/0,001	0,1	0,002	100
	$\lambda_s = 0,1$	A	0,975	-	0,03	0,0005	-
		B	0,96	-	0,05	0,0012	-
		C	0,92	-	0,09	0,005	-

Tabelle 4.3: Optimale a priori-Werte (Gewichtsfaktoren) für die untersuchten Verfahren

	Wahl der Gewichtsfaktoren	Anpassung		Gesamturteil
		$\lambda_s = 0$	$\lambda_s = 0,1$	
G 1	$\rho_0 = 1 - \sqrt{\Delta_k K_s} (c_0 - c_1 \sqrt{\lambda_s})$ enger Optimalbereich	gut Neigung zu Überschwin- gungen	befriedigend	gut
G 2	schwierig	unruhig bzw. langsam Überschwingungen		unbefriedigend
G 3	$\rho = \sqrt{\Delta_k K_s} (c_0 - c_1 \sqrt{\lambda_s})$ enger Optimalbereich	gut Neigung zu Überschwin- gungen	befriedigend	gut
R	k_R Teiler der Änderungszeit- punkte	befriedigend Überschwingungen	unruhig	befriedigend
M 3	$q_{1i} = \Delta_k b_j (c_0 - c_1 \sqrt{\lambda_s})$ ($i=4,5; j=1,2$) breiter Optimalbereich	gut asymptotische Anpassung	gut	gut

Tabelle 4.4: Leistungsvergleich der modifizierten Schätzverfahren ($\lambda_s \leq 0,2$)

und (4.40) angegebenen Zusammenhänge zwischen Gewichtungsfaktoren, Änderungsgeschwindigkeit und Störpegel für die Wahl der a priori-Werte äußerst hilfreich. Sie können jedoch nur dann mit Erfolg verwendet werden, wenn zumindest Näherungswerte für Änderungsgeschwindigkeit und Störpegel bekannt sind. Zur Auswahl optimaler Gewichtungsfaktoren wird deshalb sinnvollerweise wie folgt vorgegangen:

1. Während der Störpegel λ_s im allgemeinen auf bekannte Weise abgeschätzt werden kann, wird zur Ermittlung der Änderungsgeschwindigkeit das Verfahren R eingesetzt. Durch wenige Testläufe mit unterschiedlichen Rücksetzzeitpunkten lassen sich damit Rohwerte für $\Delta_k K_s$ bzw. $\Delta_k b_i$ bestimmen.
2. Durch Einsetzen dieser Rohwerte für λ_s und $\Delta_k K_s$ bzw. $\Delta_k b_i$ in die Gln. (4.36), (4.37) bzw. (4.40) erhält man unter Verwendung der in dieser Arbeit ermittelten Werte für c_0 und c_1 Näherungswerte für die Gewichtungsfaktoren der Verfahren G 1, G 3 oder M 3.
3. Diese Näherungswerte müssen schließlich noch durch wenige Testläufe an dem zu identifizierenden System optimiert werden.

Bei dieser Vorgehensweise lassen sich mit vertretbarem Zeitaufwand optimale a priori-Werte für die leistungsfähigen Verfahren G 1, G 3 und M 3 gewinnen.

Die Gültigkeit des vorgeschlagenen Konzepts zur Identifikation zeitvarianter Systeme auch über das untersuchte System 2. Ordnung hinaus kann durch verschiedene Anwendungen in [44] und Abschnitt 6 als bestätigt angesehen werden. Trotzdem sollte aufgrund des statistischen Charakters aller im Rahmen dieser Untersuchung erzielten Ergebnisse eine Übertragung dieser Resultate auf andere Systeme nur sehr sorgfältig und kritisch vorgenommen werden.

5. IDENTIFIKATION IM GESCHLOSSENEN REGELKREIS

=====

Die zur Ermittlung des dynamischen Verhaltens unbekannter Prozesse eingesetzten Identifikationsverfahren gehen i.a. von offenen Systemen aus, d.h. es wird angenommen, daß keine Rückführung zwischen Ausgang und Eingang der zu identifizierenden Strecke besteht. Die meisten realen Prozesse sind jedoch Bestandteile von Regelkreisen, die in vielen Fällen aus Gründen der Sicherheit und Wirtschaftlichkeit nicht unterbrochen werden dürfen. Es ist deshalb äußerst wichtig, über Methoden zu verfügen, die eine Prozeßidentifikation auch im geschlossenen Regelkreis erlauben. Im Zusammenhang mit Parameterschätzverfahren haben sich in den letzten Jahren neben einer für ökonomische Systeme vorteilhaften Vorgehensweise [52, 53] vor allem 2 Möglichkeiten zur Identifikation im geschlossenen Regelkreis herauskristallisiert:

Bei der indirekten Identifikation (ID) ergeben sich die gesuchten Streckenkennwerte aus den geschätzten Parametern des Gesamtregelkreises, wobei die Kenntnis des Reglers ausgenutzt wird [54 bis 59]. Bei der direkten Identifikation (DI) wird die gewählte Parameterschätzmethode so eingesetzt, als ob die Ein- und Ausgangssignale des Prozesses aus Messungen im offenen Kreis stammen [39, 56-62]. Der untersuchte Prozeß ist mit dem letztgenannten Verfahren eindeutig identifizierbar, wenn entweder

- a) ein zusätzliches Testsignal aufgeschaltet wird,
- b) zwischen verschiedenen Reglereinstellungen variiert wird oder
- c) spezielle Abhängigkeiten zwischen den Ordnungen von Modell und Regler berücksichtigt werden [56, 58, 59, 63, 39].

Die Forderungen a) und b) sind dabei äquivalent, da sie beide eine genügende und fortdauernde Erregung des Prozesses gewährleisten; man versucht deshalb, von beiden Möglichkeiten

jeweils diejenige zu wählen, die den Prozeßablauf am wenigsten beeinträchtigt. Forderung c) hat im Gegensatz zu a) und b) keine zusätzliche Störung des Prozesses zur Folge; sie führt jedoch i.a. zu einem Regler hoher Ordnung. Sofern eine der angegebenen Identifizierbarkeitsbedingungen für DI erfüllt ist und ein Parameterschätzverfahren eingesetzt wird, das konsistente Schätzungen ermöglicht, sind asymptotisch gleichwertige Ergebnisse der direkten (DI) und indirekten (ID) Methode zu erwarten [58, 59, 63].

5.1 Indirekte Identifikation (ID)

Setzt man voraus, daß bei der Struktur des Regelkreises nach Bild 5.1 das am Reglerausgang zusätzlich aufgeschaltete, meßbare Testsignal $r_2(k)$ stationär und nicht mit dem Störsignal $r_1(k)$ korreliert ist, so kann $r_2(k)$ als unabhängige Eingangs-

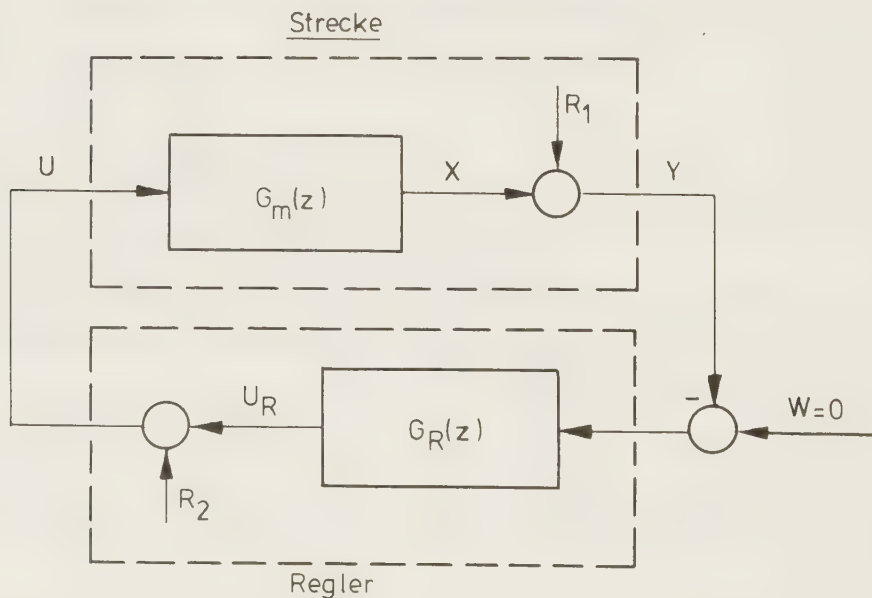


Bild 5.1: Geschlossener Regelkreis

größe des Gesamtregelkreises aufgefaßt werden. Das im geschlossenen Kreis mit $r_1(k)$ bzw. dem Fehlersignal $e(k)$

korrelierte Eingangssignal $u(k)$ lässt sich somit eliminieren, und man erhält nach Bild 5.1 die Beziehung

$$Y(z) = \frac{G_m(z)}{1 + G_R(z) G_m(z)} R_2(z) + \frac{1}{1 + G_R(z) G_m(z)} R_1(z); \quad (5.1)$$

die das offene System nach Bild 5.2 beschreibt. Diese Umformung ermöglicht die problemlose Bestimmung des Schätzwertes

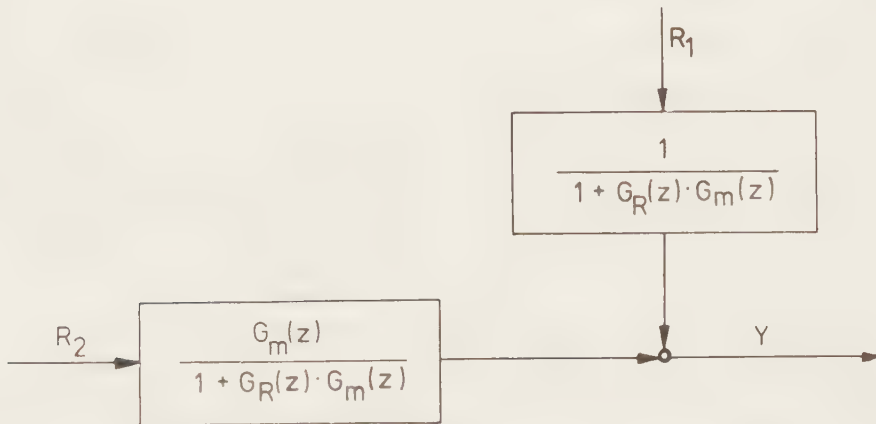


Bild 5.2: Umgeformte Darstellung des geschlossenen Kreises

$\hat{G}$ von

$$G(z) = \frac{G_m(z)}{1 + G_R(z) G_m(z)}, \quad (5.2)$$

der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $Y(z)/R_2(z)$. Bei bekannter Reglerübertragungsfunktion $G_R(z)$ erhält man die Koeffizienten der gesuchten Streckenübertragungsfunktion $\hat{G}_m(z)$ schließlich indirekt durch Rückrechnung aus $\hat{G}(z)$ nach Gl. (5.2):

$$\hat{G}_m(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1 - G_R(z) \hat{G}(z)}. \quad (5.3)$$

Verwendet man dabei als Schätzverfahren die rekursive Version der Hilfsvariablen-Methode, so wird zur Ermittlung der Parameter von $\hat{G}_m(z)$ in folgenden Schritten vorgegangen:

1. Bestimmung von $\hat{G}(z)$ durch Schätzung im offenen Kreis nach Bild 5.2 bzw. Gl. (5.1) mit dem IV-Algorithmus nach Gl. (2.47).
2. Indirekte Berechnung der gesuchten Parameter nach Gl. (5.3), wobei die Kenntnis von $G_R(z)$ vorausgesetzt wird.

Während bei ID einerseits alle Schwierigkeiten einer Identifikation im geschlossenen Regelkreis durch deren Rückführung auf eine Schätzung im offenen Kreis umgangen werden, ergibt sich andererseits gerade dadurch ein erheblicher numerischer Aufwand, der eine schlechtere Konvergenz des Verfahrens zur Folge haben kann. So müssen die gesuchten Streckenkennwerte über ein Modell ermittelt werden, das eine höhere Ordnung besitzt als der interessierende Prozeß. Die dabei erforderliche Umrechnung der Parameter kann z.T. numerische Schwierigkeiten verursachen; sie hat darüberhinaus in jedem Fall eine erhebliche Zunahme der Rechenzeit zur Folge.

5.2 Direkte Identifikation (DI)

Um die Modellparameter im geschlossenen Kreis mit Hilfe der IV-Methode direkt bestimmen zu können, werden nicht nur Hilfsvariablen $y_H(k)$ für das Ausgangssignal $y(k)$ benötigt (siehe Abschnitt 2.3.2), sondern ebenfalls Hilfsvariablen für das wegen der Rückführung mit $r_1(k)$ bzw. $e(k)$ korrelierte Eingangssignal $u(k)$ [39].

Wird wie bei der indirekten Methode zusätzlich ein von $r_1(k)$ bzw. $e(k)$ statistisch unabhängiges Testsignal $r_2(k)$ am Reglerausgang aufgeschaltet (Bild 5.1), dann kann $r_2(k)$ als Hilfsvariable für $u(k)$ verwendet werden, da es zwar mit dem Nutzanteil, jedoch nicht mit dem Störanteil von $u(k)$ korre-

liert ist. Ermittelt man die entsprechenden Hilfsvariablen $y_H(k)$ für das Ausgangssignal $y(k)$ nach Bild 5.3, so können mit

$$\underline{w}^T(k) = \begin{bmatrix} -y_H(k-1) \dots -y_H(k-n) & r_2(k-1) \dots r_2(k-n) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$(k=n+1, \dots, n+N)$

als Zeilen der Hilfsvariablenmatrix $\underline{W}$ nach Gl. (2.39) die Bedingungen (2.40) und (2.41) erfüllt werden. Nach Anhang A ergibt sich damit eine konsistente Schätzung der Streckenparameter .

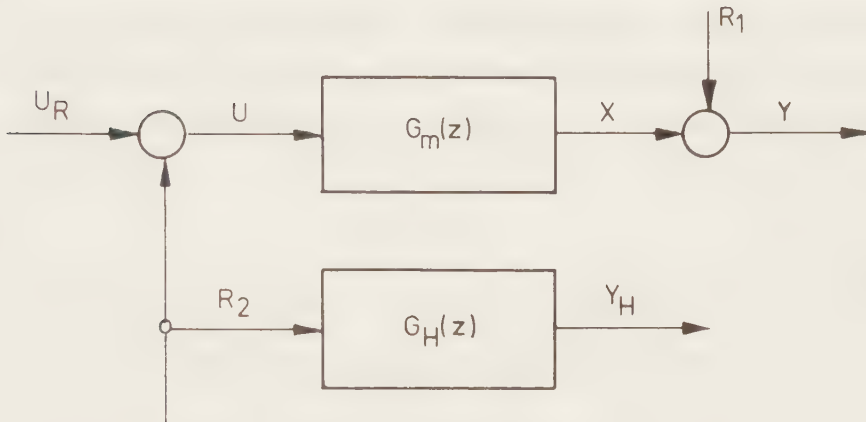


Bild 5.3: Spezielle Wahl des Hilfsmodells im geschlossenen Kreis

Zur Identifikation wird wie bei der indirekten Methode der rekursive IV-Algorithmus nach Gl. (2.47) eingesetzt. Die Vorgehensweise entspricht dabei völlig der im offenen Kreis, nur sind in $\underline{w}^T(k)$ die Eingangssignalwerte $u(k-i)$ durch die entsprechenden Werte $r_2(k-i)$ ($i=1,2,\dots,n$) zu ersetzen.

Im Vergleich zur indirekten Methode hat DI nicht nur numerische Vorteile - bedingt durch die nicht erforderliche Umrechnung der Parameter -, sondern vor allem einen wesentlich geringeren Bedarf an Rechenzeit, der sich auch gegenüber der Schätzung im offenen Kreis nicht erhöht. Andererseits ist zu

erwarten, daß sich durch die Verwendung von nunmehr 2 Hilfsvariablen die numerische Stabilität des Verfahrens verschlechtert.

Ein Vergleich der Identifikationsergebnisse beider Methoden sowohl untereinander als auch mit Ergebnissen einer Schätzung im offenen Kreis (siehe Abschnitt 3.4), soll im folgenden Abschnitt eine exakte Beurteilung ermöglichen.

5.3 Identifikationsergebnisse

Die Untersuchung der beiden, speziell zur Identifikation im geschlossenen Regelkreis vorgeschlagenen Verfahren ID und DI erfolgte an einer analog simulierten Strecke 3. Ordnung (Prozeß 2) mit der kontinuierlichen bzw. diskreten Übertragungsfunktion nach Gl. (3.3) und (3.4) und einem PI-Regler in der Darstellung

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (5.5)$$

mit $K_R = 6,8$ und $T_I = 11,2s$. Die zugehörigen Übergangsfunktionen der Strecke und des geschlossenen Kreises sind in Bild 5.4 dargestellt.

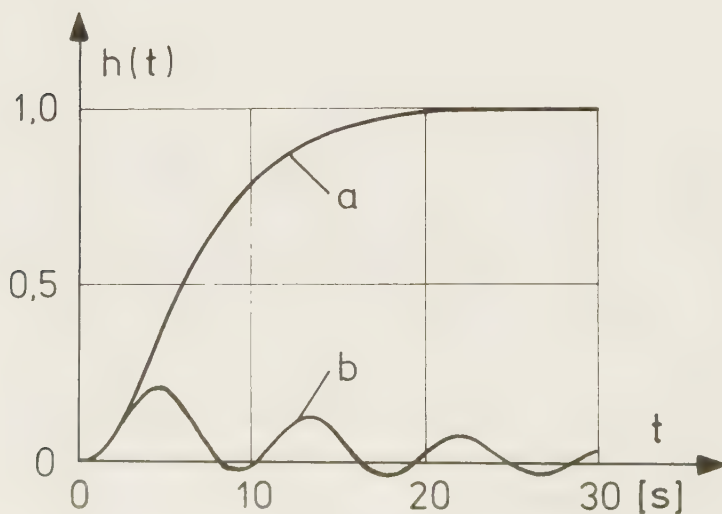


Bild 5.4: Übergangsfunktionen der Strecke (a) und des geschlossenen Kreises (b)

Als zusätzliches Testsignal $r_2(k)$ wurde in beiden Fällen ein binäres Pseudo-Rauschsignal (PRBS) verwendet, dessen Kennwerte ebenso wie die Abtastzeit nach den in Abschnitt 3.3 aufgestellten Richtlinien wie folgt gewählt wurden:

$$\text{ID: } N_u = 31 \quad \Delta t_u = 4s \quad T = 1,3s$$

$$\text{DI: } N_u = 31 \quad \Delta t_u = 2s \quad T = 0,5s.$$

Für die zum Vergleich herangezogene Schätzung im offenen Regelkreis (OR) wurden dieselben Kennwerte wie für DI verwendet - desgleichen für einen mit OM bezeichneten Versuch, bei dem der IV-Algorithmus nach Gl. (2.47) ohne jegliche Modifikation zur Schätzung im geschlossenen Kreis eingesetzt wurde. Als Beispiel für die vorliegenden Meßbedingungen sind für ID in Bild 5.5 die Verläufe des Testsignals $r_2(t)$ und des Ausgangssignals $y(t)$ für verschiedene Störpegel λ_s aufgezeichnet.

Die Beurteilung der Schätzergebnisse erfolgt im weiteren in erster Linie anhand der für die Parameter, den Verstärkungsfaktor und die Übergangsfunktion ermittelten Werte $\hat{a}_i$ ($i=1,2$), $\hat{K}_s$ und $\hat{h}_m$.

Bild 5.6 zeigt den zeitlichen Verlauf der Schätzwerte $\hat{K}_s$ und $\hat{a}_i$ ($i=1,2$) im Fall ohne Rauschen. Alle zur Identifikation im geschlossenen Kreis eingesetzten Verfahren liefern nach 1000 Messungen eine sehr gute (ID, DI) bis gerade noch zufriedenstellende (OM) Schätzung von $\hat{K}_s$ und $\hat{a}_i$, ohne allerdings - vor allem im Fall OM - die Qualität der im offenen Kreis erzielten Ergebnisse (OR) ganz erreichen zu können. Obwohl sich mit ID und DI nahezu exakte Endwerte für $\hat{K}_s$ und $\hat{a}_i$ ermitteln lassen, ist deren zeitlicher Verlauf doch durch eine wesentlich langsamere Konvergenz als bei OR gekennzeichnet. Ein Vergleich der Schätzergebnisse der im geschlossenen Kreis eingesetzten Verfahren deutet bereits im Fall ohne Rauschen auf

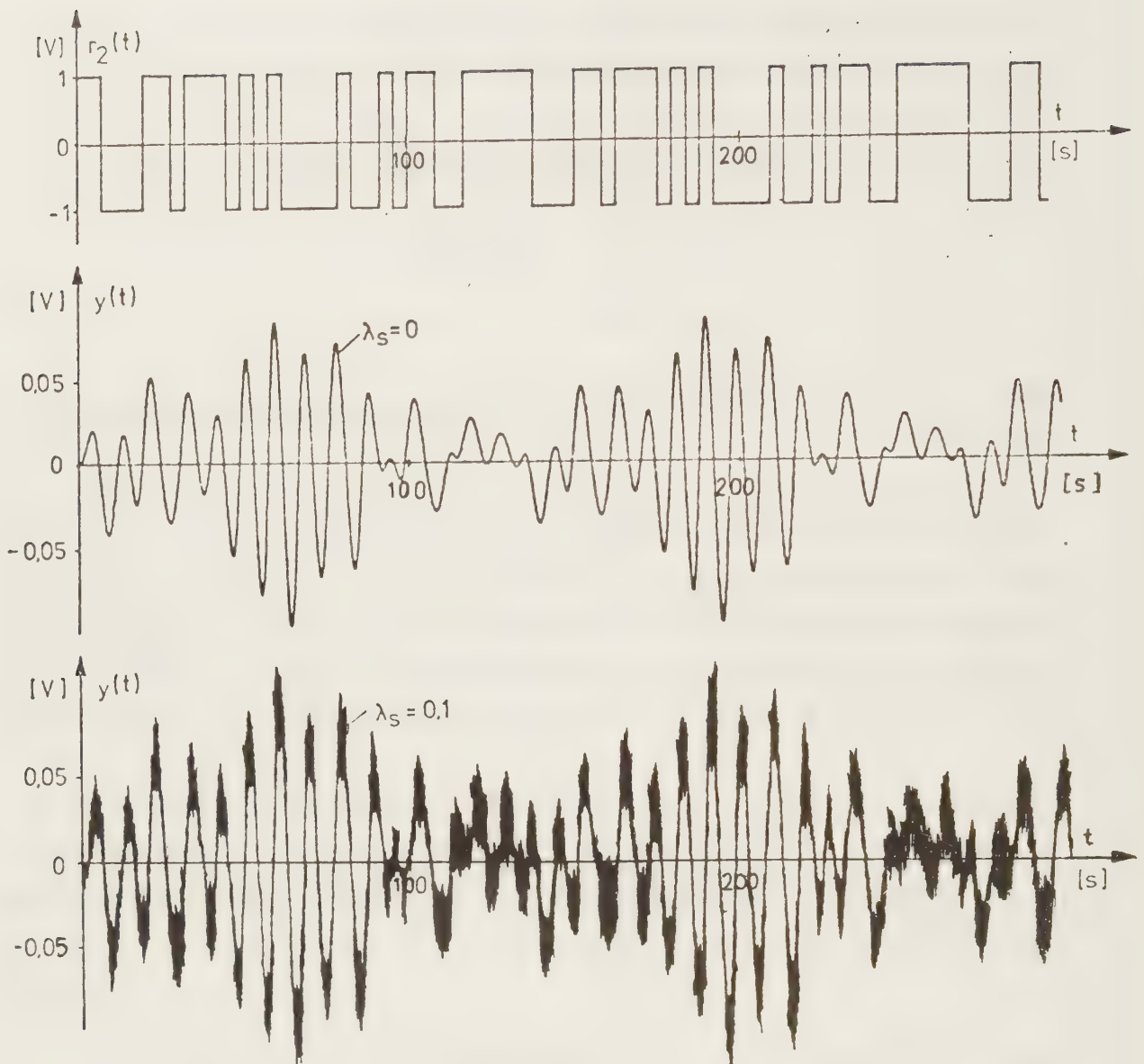


Bild 5.5: Verlauf von Testsignal $r_2(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$ für verschiedene Störpegel λ_s
($N_u = 31$, $\Delta t_u = 4s$)

eine geringere Leistungsfähigkeit von OM hin, während die Verfahren ID und DI nahezu gleichwertige Ergebnisse liefern.

In Bild 5.7 ist der Einfluß unterschiedlicher Störpegel λ_s auf den Verlauf des geschätzten Verstärkungsfaktors $\hat{K}_s$ dargestellt. Nach 1000 Messungen ergeben sich mit ID und DI nur geringfügig schlechtere Schätzwerte als bei OR; diese

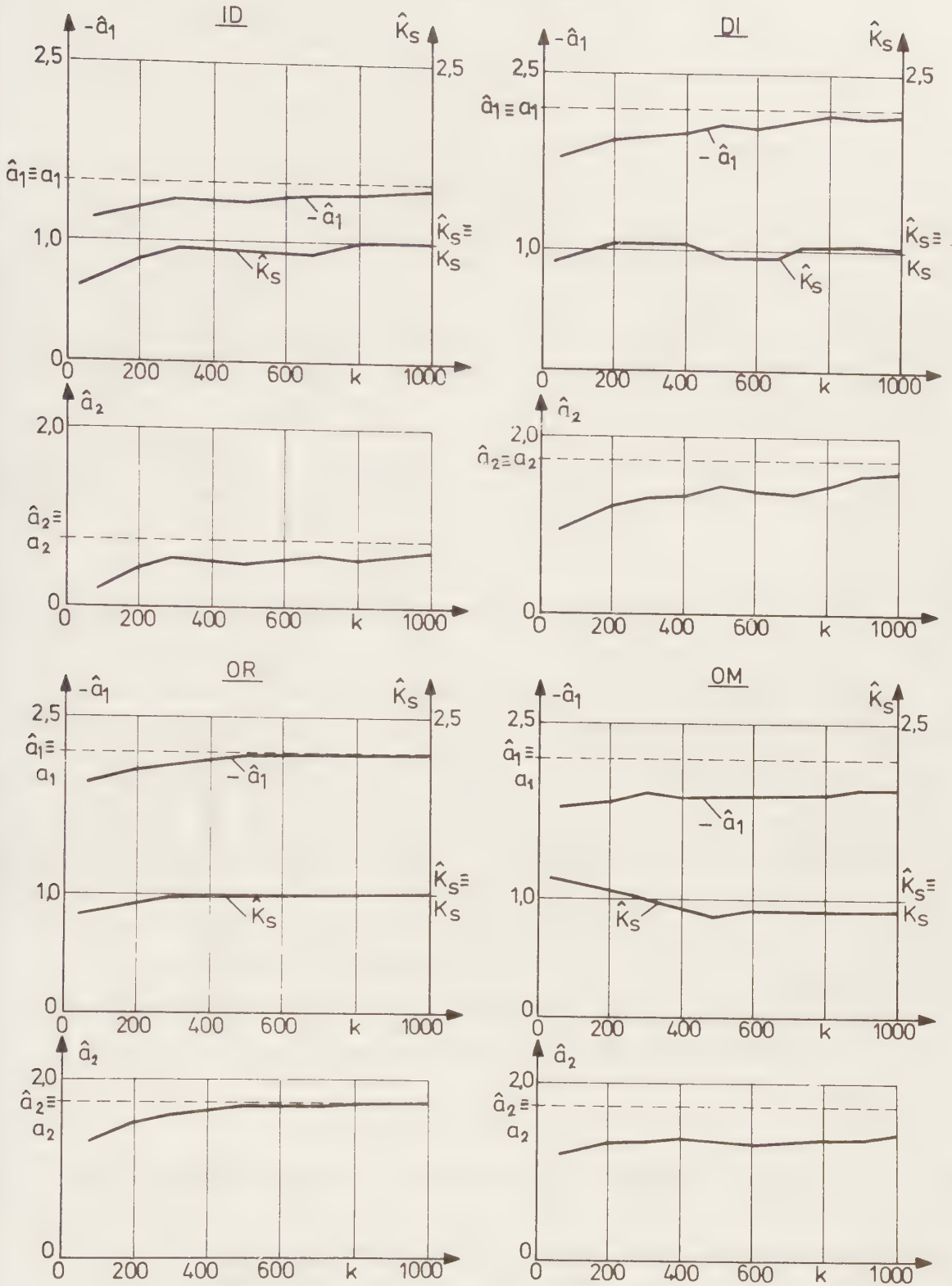


Bild 5.6: Verlauf der Parameter $\hat{a}_1$ und des Verstärkungsfaktors $\hat{K}_S$ bei Identifikation im offenen (OR) und geschlossenen Kreis (ID, DI und OM) ($\lambda_s = 0$)

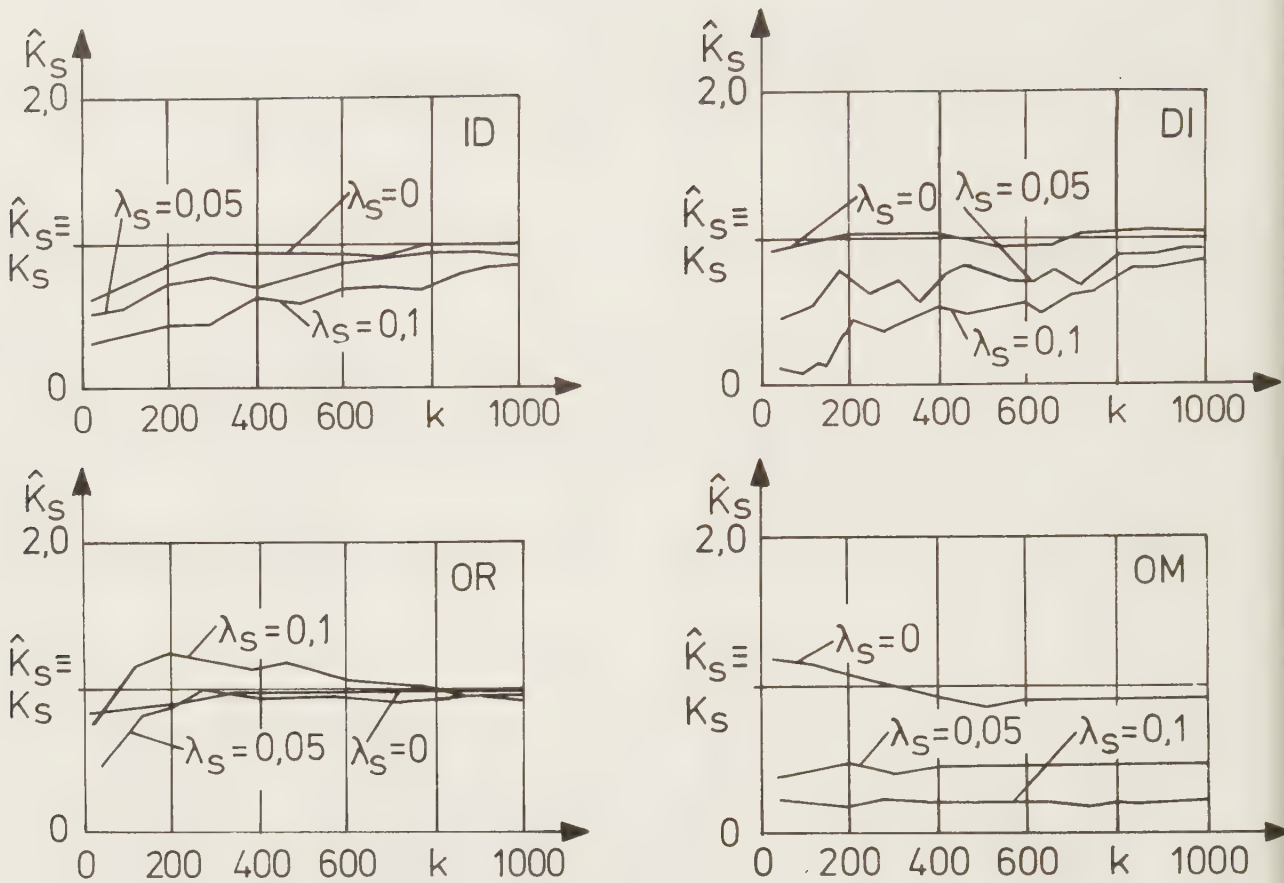


Bild 5.7: Verlauf des geschätzten Verstärkungsfaktors $\hat{K}_s$ für unterschiedliche Störpegel λ_s bei Identifikation im offenen (OR) und geschlossenen Kreis (ID, DI und OM)

werden allerdings wesentlich langsamer erreicht als bei der Schätzung im offenen Kreis. Vor allem bei DI ist darüberhinaus der Verlauf von $\hat{K}_s$ wesentlich unruhiger als bei den übrigen Verfahren - eine Tatsache, die sich auf die durch die Verwendung zweier Hilfsvariablen verminderte numerische Stabilität des Verfahrens zurückführen läßt. Die im Vergleich zu OR schlechtere Konvergenz der beiden modifizierten Verfahren ist ebenfalls eine Folge der zusätzlichen Hilfsvariablen bei DI bzw. des enormen numerischen Aufwandes bei der indirekten Methode.

Völlig unbrauchbare Ergebnisse im Fall eines dem Systemausgang überlagerten Rauschsignals liefert schließlich OM. Dadurch wird deutlich, daß auf die vorgeschlagenen Modifikationen des IV-Algorithmus zur Identifikation im geschlossenen Regelkreis nicht verzichtet werden kann, da andernfalls die Bedingungen (2.40) und (2.41) für eine konsistente Parameterschätzung nicht erfüllt sind.

Die zur besseren Beurteilung der Ergebnisse in Bild 5.8 angegebenen Übergangsfunktionen $\hat{h}_m(kT)$ bestätigen die bereits im Zusammenhang mit $\hat{K}_s$ gemachten Aussagen. So wird das dynamische Verhalten bei hohen Frequenzen bei ID und DI mit nahezu derselben Güte bestimmt wie im offenen Kreis, lediglich für den geschätzten Verstärkungsfaktor $\hat{K}_s$ erhält man geringfügig schlechtere Werte als bei OR. Mit OM ergeben sich dagegen wiederum unbrauchbare Identifikationsergebnisse.

Die bereits aus Bild 5.7 ersichtlichen Endwerte des Verstärkungsfaktors $\hat{K}_s$ nach 1000 Messungen sind in Abhängigkeit vom Störpegel für alle 4 Verfahren in Bild 5.9 aufgezeichnet worden. Dabei wird noch einmal deutlich, daß bei Anwendung von ID bzw. DI zur Schätzung im geschlossenen Kreis im Zusammenhang mit der IV-Methode nahezu gleichwertige Ergebnisse wie im offenen Kreis erzielt werden können. Dabei muß allerdings berücksichtigt werden, daß Bild 5.9 nichts über die Konvergenzgeschwindigkeit der 4 Verfahren aussagt.

5.4 Beurteilung der Schätzergebnisse

Beide Möglichkeiten ID und DI zur Identifikation im geschlossenen Regelkreis liefern im Zusammenhang mit der rekursiven Version der IV-Methode nur geringfügig schlechtere Ergebnisse als eine Schätzung im offenen Kreis (OR). Allerdings ist zur Ermittlung dieser Schätzwerte in Abhängigkeit vom Störpegel das 1 1/2- bis 3-fache der bei OR benötigten Meßzeit erforderlich. Abgesehen von geringfügigen Schwankungen im

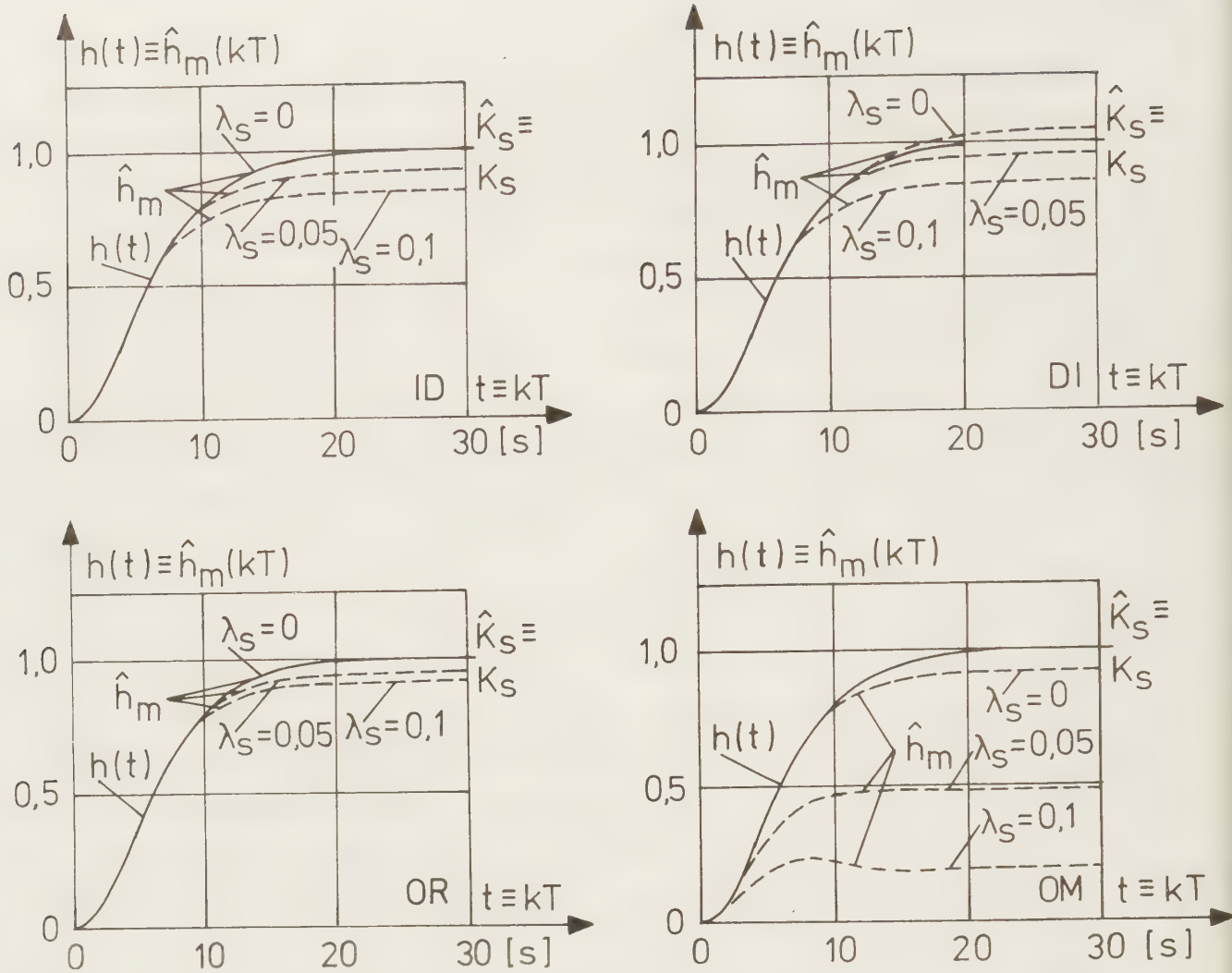


Bild 5.8: Verlauf der geschätzten Übergangsfunktionen $\hat{h}_m(kT)$ für unterschiedliche Störpegel λ_s bei Identifikation im offenen (OR) und geschlossenen Kreis (ID, DI und OM)

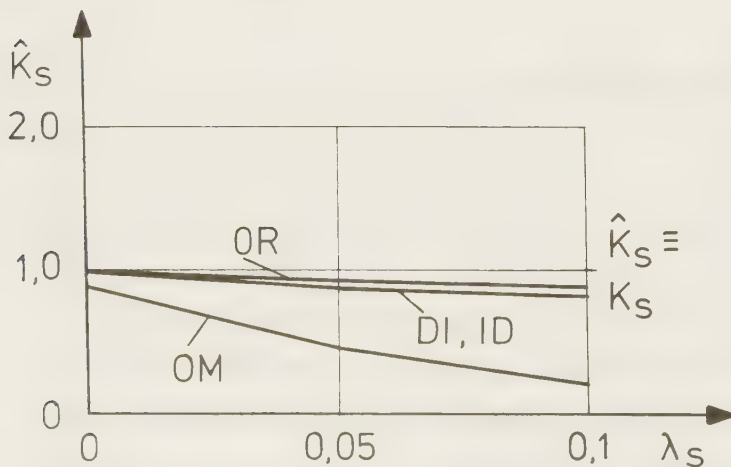


Bild 5.9:

Einfluß des Störpegels λ_s auf den Verstärkungsfaktor $\hat{K}_S$ bei Identifikation im offenen (OR) und geschlossenen Kreis (ID, DI und OM)

zeitlichen Verlauf der Schätzwerte bei DI ergeben sich mit beiden modifizierten Verfahren gleichwertige Identifikationsergebnisse.

Während bei der direkten Methode lediglich dieselbe Rechenzeit und derselbe Programmieraufwand wie bei einer Schätzung im offenen Regelkreis erforderlich sind, nehmen diese bei der indirekten Methode infolge des beträchtlichen numerischen Aufwandes ganz erheblich zu. Das Verfahren OM schließlich ist für eine Identifikation im geschlossenen Regelkreis unbrauchbar.

In der vorliegenden Arbeit werden nur Identifikationsergebnisse vorgestellt, die bei einer einzigen, speziell nach [64] optimierten Reglereinstellung ermittelt wurden. Die interessante Frage, inwieweit die Güte der Schätzergebnisse auch von unterschiedlichen Reglereinstellungen abhängt, wird im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt, ausführliche Untersuchungen zu diesem Problemkreis finden sich jedoch in [65].

6. PRAKTISCHE ANWENDUNG DER HILFSVARIABLEN-METHODE ZUR IDENTIFIKATION EINES WÄRMETAUSCHERS

Die Leistungsfähigkeit der in dieser Arbeit an simulierten Systemen überprüften Parameterschätzverfahren sowie die Gültigkeit der aufgestellten Richtlinien für eine optimale Identifikation konnten in den vergangenen Jahren bereits durch zahlreiche Untersuchungen an verschiedenen industriellen Regelstrecken bestätigt werden [27, 49, 66 bis 68]. In den meisten Fällen war es dabei möglich, die interessierenden Prozeßmodelle im offenen Kreis zu ermitteln.

Um jedoch auch die praktische Relevanz der in den Abschnitten 4 und 5 vorgeschlagenen Modifikationen der Hilfsvariablen-Methode zur Identifikation zeitvarianter Systeme bzw. zur Parameterschätzung im geschlossenen Regelkreis überprüfen zu können, wurden Untersuchungen an einem Wärmetauscher durchgeführt, der aufgrund von Durchsatzänderungen zeitvariantes dynamisches Verhalten aufwies. Die dabei erzielten Schätzergebnisse, die auch im geschlossenen Kreis ermittelt wurden, sollen in den folgenden Abschnitten kurz vorgestellt werden.

6.1 Das untersuchte System

Bei dem untersuchten Wärmetauscher handelt es sich um eine Laboranlage, bei der Druckluft beim Durchströmen eines Rohrs mittels einer elektrischen Heizwicklung erwärmt wird [69]. Die Transportzeit ist klein und kann gegenüber den großen Zeitkonstanten des Systems vernachlässigt werden. Bild 6.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau der Regelstrecke. Änderungen der an zwei Stellen mit Thermoelementen gemessenen Austrittstemperaturen $\Delta \vartheta_M$ und $\Delta \vartheta_A$ der Luft werden dabei durch die drei Eingangsgrößen Heizleistung Q , Eintrittstemperatur ϑ_E der Luft und Luftdurchsatz $\dot{M}$ verursacht. Während die Änderungen ΔQ und $\Delta \dot{M}$ durch Verstellen der Streckenheizung (SH) bzw.

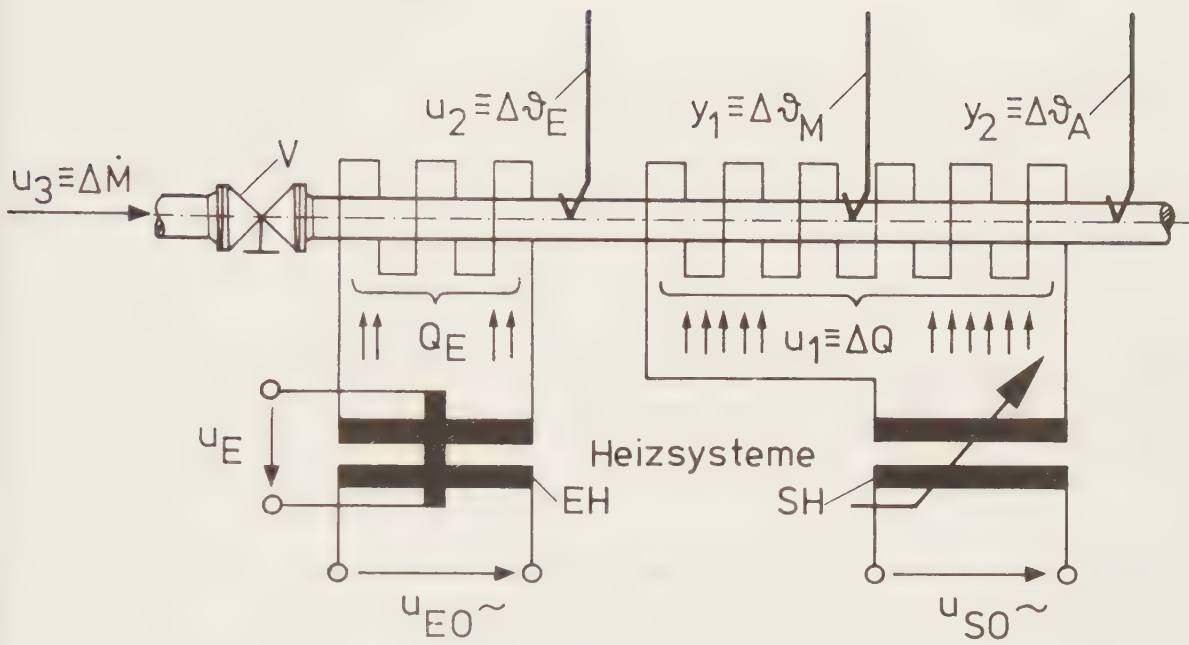


Bild 6.1: Prinzipieller Aufbau des Wärmetauschers

eines Ventils (V) direkt vorgenommen werden können (Bild 6.1), ist eine Änderung $\Delta \vartheta_E$ der Lufteintrittstemperatur nur durch eine zusätzliche Heizung (EH) möglich.

Das dynamische Verhalten des Wärmetauschers wird für die Ausgangsgröße $y_1 \equiv \Delta \vartheta_M$ nach Bild 6.2 durch die drei Übertragungsfunktionen G_Q , G_ϑ und $G_{\dot{M}}$ gekennzeichnet, die sich aus

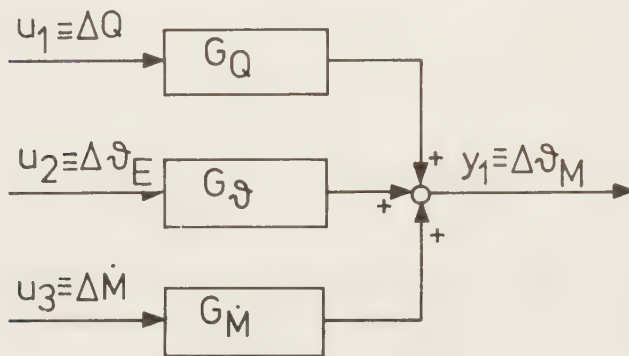


Bild 6.2:

Blockschaltbild zum dynamischen Verhalten des Wärmetauschers

der Wirkung der 3 Eingangsgrößen Q , ϑ_E und $\dot{M}$ auf die Austrittstemperatur ϑ_M ergeben. Alle 3 Teilsysteme können getrennt identifiziert werden.

Zur Identifikation der in dieser Arbeit speziell interessierenden Streckenheizung (G_Q) wurde sowohl im offenen als auch im geschlossenen Kreis ein PRBS-Testsignal verwendet, dessen Kennwerte N_u und Δt_u ebenso wie die Abtastzeit T nach den in Abschnitt 3.3 aufgestellten Regeln ermittelt wurden:

$$N_u = 31 \quad \Delta t_u = 33,3s \quad T = 5s.$$

Die Amplitude des Testsignals wurde darüberhinaus so gewählt, daß die Linearität in dem verwendeten Arbeitspunkt, gekennzeichnet durch die Daten

$$u_e = 7V, u_{e0} = 120V \sim \text{für die Eingangsheizung (EH),}$$

$$u_s = 2V, u_{s0} = 70V \sim \text{für die Streckenheizung (SH) und}$$

$$\dot{M} = 80 \text{ l/min für den Luftdurchsatz,}$$

gewährleistet blieb.

Um bei der Identifikation ein zeitvariantes dynamisches Verhalten der untersuchten Streckenheizung zu erhalten, wurde der Luftdurchsatz im Verlauf der Messungen nach 2715s sprungförmig sowohl von $\dot{M} = 80 \text{ l/min}$ auf 40 l/min herab- als auch von $\dot{M} = 40 \text{ l/min}$ auf 80 l/min heraufgesetzt. Die Regelung erfolgte über einen mit dem Prozeßrechner HP 2100A realisierten PI-Regler in der Darstellung nach Gl. (5.5) mit den Parametern

$$K_R = 0,75 \quad \text{und} \quad T_I = 50\text{s}.$$

Unter diesen Voraussetzungen wurde die Streckenheizung mit Hilfe der IV-Methode auf 2 unterschiedliche Arten identifiziert:

- einerseits als System mit konstanten Parametern und
- andererseits als zeitvariantes System aufgrund von Durchsatzänderungen. Zur Anpassung an die veränderlichen Parameter wurde dabei das modifizierte Verfahren G 3 nach Abschnitt 4 eingesetzt.

In beiden Fällen wurden die gesuchten Parameter sowohl im offenen (OR) als auch im geschlossenen Kreis unter Verwendung der Methode der direkten Identifikation (DI) ermittelt. Die Genauigkeit der dabei erhaltenen Modelle wird in den folgenden Abschnitten in erster Linie anhand der geschätzten Modellausgangssignale und Übergangsfunktionen $\hat{y}_{m1}(kT)$ bzw. $\hat{h}_{m1}(kT)$ beurteilt.

6.2 Identifikation bei konstanten Parametern der Streckenheizung

Wie Bild 6.3 zeigt, bildet in beiden Fällen OR und DI das für verschiedene Modellordnungen n geschätzte Modellausgangssignal $\hat{y}_{m1}$ das direkt gemessene normierte Ausgangssignal $y_1 \equiv \Delta v_M$ des Teilsystems Streckenheizung bereits für $n = 2$ sehr genau nach. Dabei ergeben sich sowohl im offenen (OR) als auch im

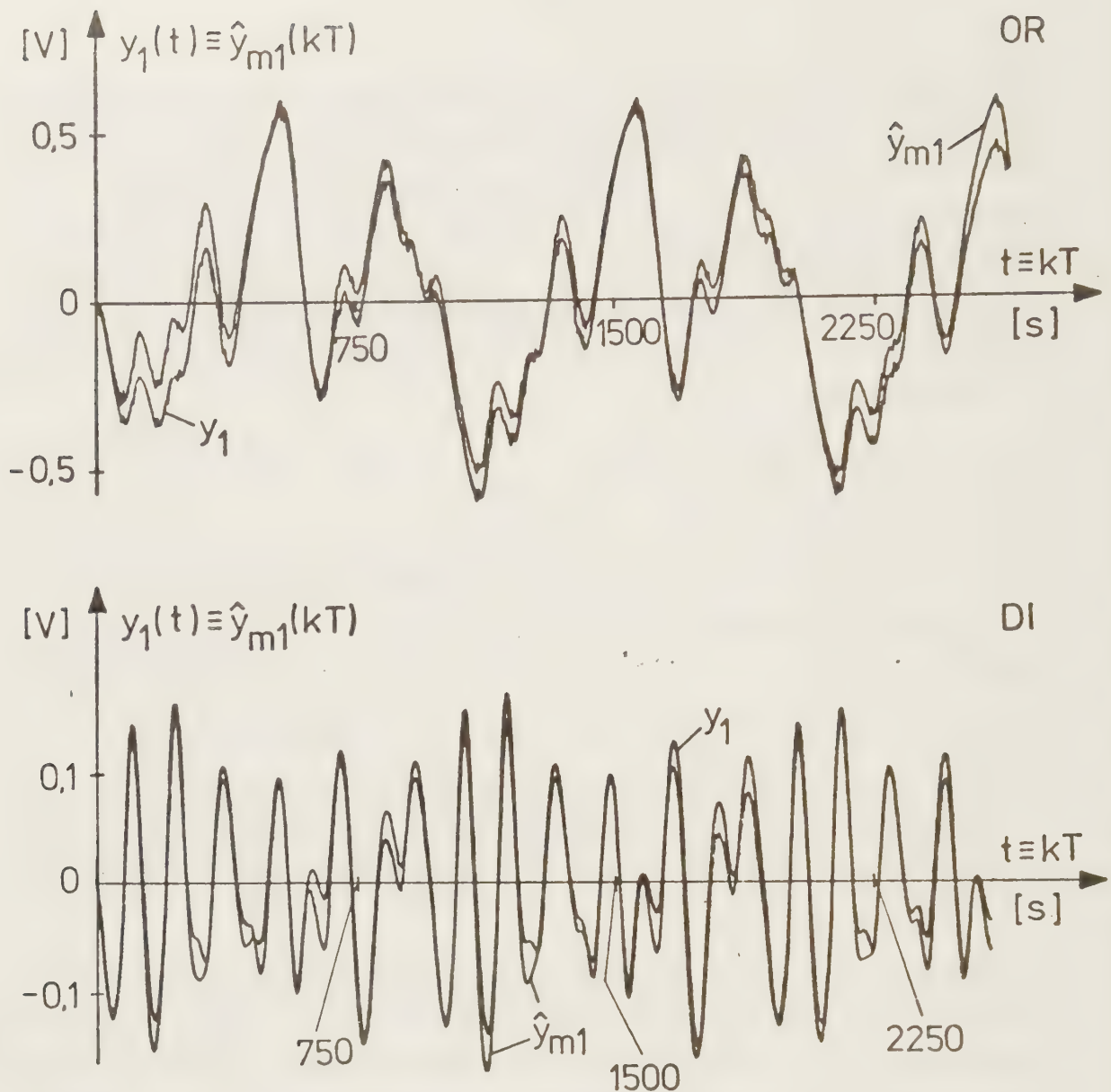


Bild 6.3: Vergleich der gemessenen und der geschätzten Ausgangssignale $y_1(t)$ und $\hat{y}_{m1}(kT)$ des Teilsystems Streckenheizung im offenen (OR) und geschlossenen Kreis (DI) ($N_u = 31$, $\Delta t_u = 33,3s$, $T = 5s$, $n = 2$)

geschlossenen Kreis (DI) Identifikationsergebnisse nahezu derselben Güte, was durch die in Bild 6.4a aufgezeichneten, auf der Grundlage der normierten Ein- und Ausgangssignale geschätzten Übergangsfunktionen $\hat{h}_{m1}(kT)$ bestätigt wird. Das untersuchte System wird somit mit den in Tabelle 6.1 angegebenen Parameterschätzwerten der diskreten Übertragungsfunktion

$$G_Q(z) = \frac{Y_{m1}(z)}{U_1(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

(6.1)

recht genau beschrieben. Die ermittelten Modelle stimmen darüberhinaus gut mit bereits früher an derselben Anlage er-

	Schätzwerte der Parameter					Schätzwert des Verstärkungsfaktors	Schätzwert der Modellordnung
	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{b}_0$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{K}_S$	$\hat{n}_0$
OR	-1,759	0,772	0,0210	-0,0361	0,0244	0,752	2
DI	-1,759	0,786	0,0058	-0,033	0,0478	0,762	2

Tabelle 6.1: Schätzwerte der Parameter, des Verstärkungsfaktors K_S und der Modellordnung n_0 für das Teilsystem Streckenheizung im offenen (OR) und geschlossenen Kreis (DI) ($N_u = 31$, $\Delta t_u = 33,3s$, $T = 5s$)

zielten Schätzergebnissen überein, sofern die unterschiedlichen Normierungen der Ein- und Ausgangssignale berücksichtigt werden [66, 27].

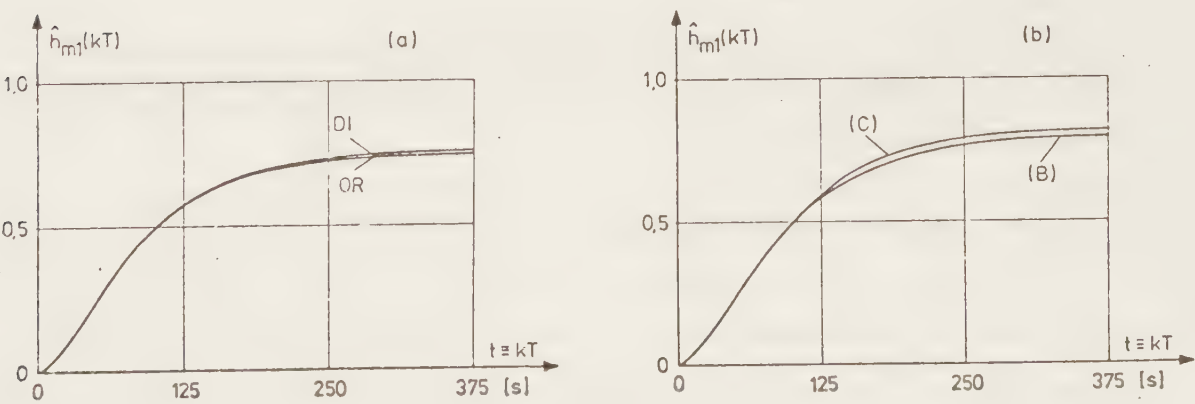


Bild 6.4: Verlauf der geschätzten Übergangsfunktionen $\hat{h}_{m1}(kT)$ des Teilsystems Streckenheizung im offenen (OR) und geschlossenen Kreis (DI) sowie nach dem Anstieg (C) bzw. vor Absinken des Durchsatzes (B) ($N_u = 31$, $\Delta t_u = 33,3s$, $T = 5s$, $n = 2$)

6.3 Identifikation der Streckenheizung unter dem Einfluß von Durchsatzänderungen

Bild 6.5 zeigt Ergebnisse, die bei einer einmaligen Änderung des Durchsatzes nach 2715s sowohl im offenen (OR) als auch im geschlossenen Kreis (DI) erzielt wurden.

Dabei wird deutlich, daß bei einem Einsatz des ungewichteten IV-Algorithmus (Bild 6.5A) im offenen Kreis keine Parameteränderungen erkannt werden können, während mit Hilfe des modifizierten Verfahrens G 3, dessen Gewichtungsfaktor ρ entsprechend den in Abschnitt 4.5 aufgestellten Richtlinien gewählt wurde, bereits für $n = 2$ eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem Modellausgangssignal $\hat{y}_{m1}$ und dem direkt gemessenen normierten Ausgangssignal $y_1 \equiv \Delta \psi_M$ des Teilsystems Streckenheizung erreicht wird (Bild 6.5B und C). Vor allem bei einem Absenken des Durchsatzes von $\dot{M} = 80 \text{ l/min}$ auf 40 l/min ergeben sich nach Bild 6.5B ausgezeichnete Ergebnisse. Bei einem Anstieg erhält man dagegen speziell im Bereich der Durchsatzänderung etwas größere Signaldifferenzen (Bild 6.5C). Die Leistungsfähigkeit des modifizierten Verfahrens G 3 wird darüberhinaus noch dadurch bestätigt, daß die auf der Grundlage der normierten Ein- und Ausgangssignale geschätzten Übergangsfunktionen $\hat{h}_{m1}(kT)$ vor dem Absenken bzw. nach dem Ansteigen des Durchsatzes (d.h. 2715s bzw. 6300s nach Beginn der Schätzung entsprechend Bild 6.5B bzw. C) nahezu identisch sind (Bild 6.4b) und auch recht gut mit den Übergangsfunktionen nach Bild 6.4a übereinstimmen, die im offenen bzw. geschlossenen Kreis bei konstanten Parametern der Streckenheizung ermittelt wurden.

Schließlich liefert auch das Verfahren DI in Verbindung mit G 3 bei einem Herabsetzen des Durchsatzes von $\dot{M} = 80 \text{ l/min}$ auf 40 l/min im geschlossenen Regelkreis eine sehr gute Übereinstimmung zwischen gemessenem und geschätztem Ausgangssignal. Lediglich im Bereich der Durchsatzänderung, die im geschlossenen Kreis infolge des Reglereinflusses nur schwer zu erkennen ist, ergeben sich etwas größere Signaldifferenzen als zu Beginn und am Ende der Schätzung.

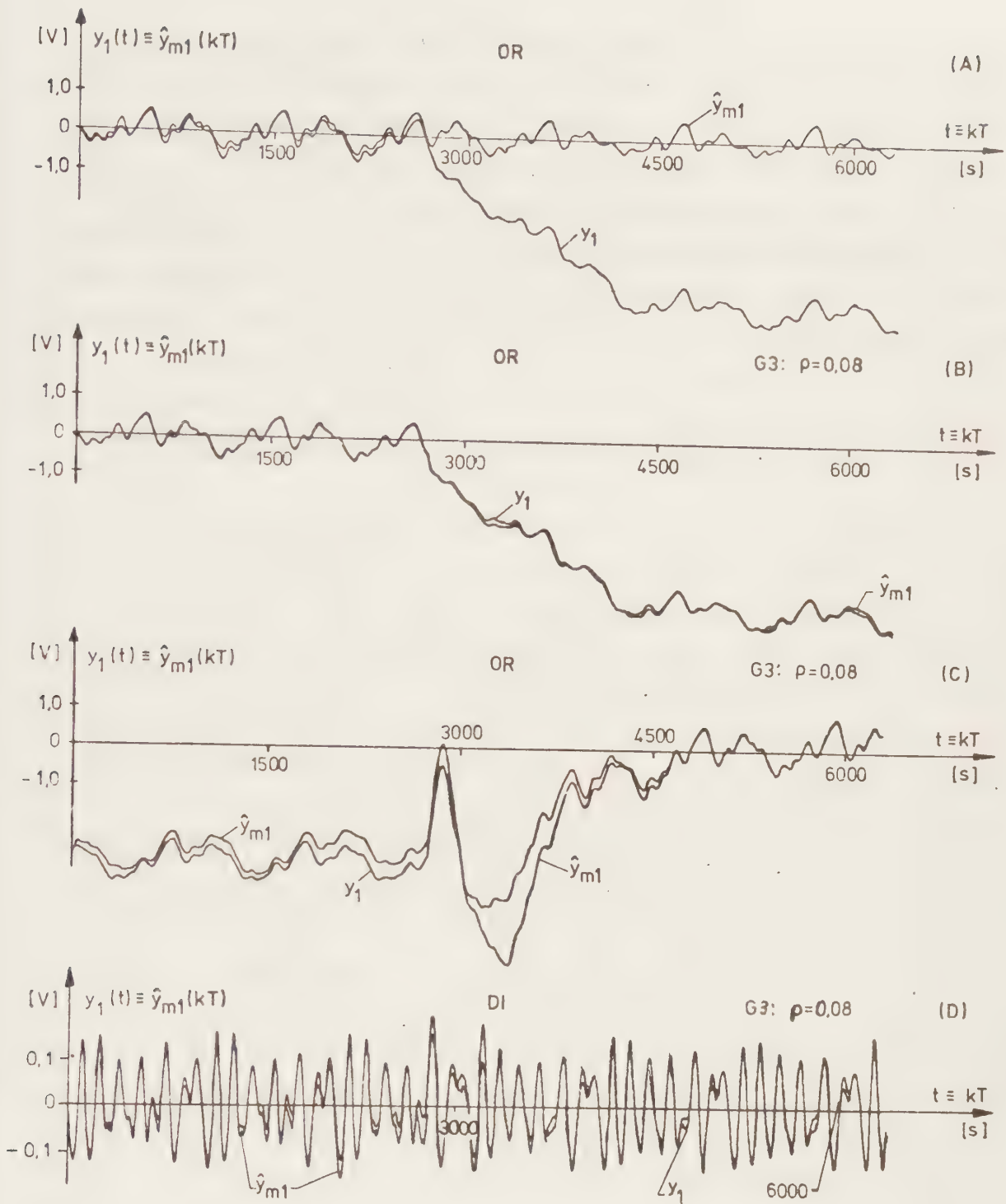


Bild 6.5: Vergleich der gemessenen und geschätzten Ausgangssignale $y_1(t)$ und $\hat{y}_{m1}(kT)$ des Teilsystems Streckenheizung bei absinkendem (A, B, D) bzw. ansteigendem Durchsatz (C) im offenen (OR) und geschlossenen Kreis (DI) ($N_u = 31$, $\Delta t_u = 33,3s$, $T = 5s$, $n = 2$)

Durch diese in allen untersuchten Fällen sehr zufriedenstellende Modellanpassung konnte die Leistungsfähigkeit der im Zusammenhang mit der IV-Methode eingesetzten Verfahren G 3 und DI eindrucksvoll bestätigt werden. Darüberhinaus zeigte es sich jedoch auch, daß die zunächst anhand der Untersuchung eines bekannten Systems in den Abschnitten 3.3 und 4.5 aufgestellten Richtlinien auch bei dieser ergänzenden Identifikation eines realen Prozesses eine wertvolle Hilfe darstellen.

7. ZUSAMMENFASSUNG

=====

In der vorliegenden Arbeit werden neben einem kritischen Leistungsvergleich zwischen 6 rekursiven Parameterschätzverfahren, die besonders zur on-line Identifikation linearer dynamischer Systeme mit Hilfe von Prozeßrechnern geeignet sind, mehrere, sowohl zur Ermittlung zeitvarianter Parameter als auch zur Prozeßidentifikation im geschlossenen Regelkreis vorgeschlagene Modifikationen der Hilfsvariablen-Methode eingehend untersucht und schließlich an einem realen Prozeß erprobt.

Der Leistungsvergleich wurde dabei an zwei analog simulierten stochastisch gestörten Testprozessen bekannter Ordnung bei unterschiedlichen Stör-Nutzsignalverhältnissen durchgeführt. Dabei zeigte sich, daß die Leistungsfähigkeit der untersuchten Parameterschätzverfahren gleichermaßen vom Modellansatz und vom numerischen Lösungsverfahren abhängt. So ergeben sich bei den erweiterten LS-Methoden trotz gleicher Numerik umso bessere Schätzwerte, je umfangreicher das verwendete Störsignalfilter ist. Andererseits liefert die RML-Methode, die denselben Modellansatz wie die 2.EM-Methode besitzt, aufgrund eines anderen Lösungsverfahrens wesentlich schlechtere Identifikationsergebnisse.

Von allen untersuchten Parameterschätzverfahren stellen die 3.EM- und die IV-Methode unter den verschiedenartigsten Betriebsbedingungen die leistungsfähigsten Methoden dar. Als numerisches Lösungsverfahren wird bei beiden der auf der Least Squares-Technik basierende Rekursivalgorithmus verwendet; der umfangreiche Modellansatz der 3.EM-Methode wird bei der IV-Methode dagegen durch eine sog. Hilfsmodelltechnik ersetzt, die es darüberhinaus erlaubt, mit äußerst wenig Rechenzeit und Speicherplatz auszukommen.

Die mit beiden Verfahren erzielten, sehr zufriedenstellenden Schätzergebnisse sind nicht zuletzt eine Folge der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Rücksetztechnik, die nicht nur die Leistungsfähigkeit der eingesetzten Verfahren erhöht, sondern auch

das in Verbindung mit rekursiven Parameterschätzverfahren auftretende Anfangswertproblem erheblich vereinfacht.

Da man bei allen bekannten Parameterschätzverfahren nur dann konsistente Schätzungen erhält, wenn die Störsignale stationär sind, müssen die bei realen Prozessen fast immer auftretenden Driftsignale durch ein geeignetes Drifteliminationsverfahren beseitigt werden. Es zeigte sich im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen, daß durch eine Hochpaßfilterung der Ein- und Ausgangssignale die niederfrequenten Signalanteile sehr wirkungsvoll und ohne großen Rechenaufwand eliminiert werden können.

Ein Haupteinsatzgebiet rekursiver Parameterschätzverfahren stellt die Identifikation zeitvarianter Systeme dar, für die sie wegen ihrer rekursiven Arbeitsweise hervorragend geeignet sind. Allerdings ist dazu eine Modifikation der verwendeten Rekursionalgorithmen erforderlich, sei es durch eine Datenwichtung oder eine Modellierung der Parameteränderungen. Aufgrund umfangreicher Untersuchungen und Vergleiche solcher Modifikationen der IV-Methode konnte ein Konzept zur Identifikation zeitvarianter Systeme vorgeschlagen werden, das sich auf einen dabei ermittelten Zusammenhang zwischen der Änderungsgeschwindigkeit der Parameter, dem Störpegel und den optimalen a priori-Werten (Gewichtsfaktoren) für die gewählten Modifikationen stützt. Während diese a priori-Werte bisher in einer Vielzahl von Identifikationsläufen durch "Probieren" bestimmt werden mußten, erlaubt es das vorgeschlagene Konzept, geeignete a priori-Werte vorauszuberechnen und ermöglicht dadurch eine problemlose Schätzung der veränderlichen Parameter bei äußerst geringem Zeitaufwand.

Nicht weniger wichtig, vor allem im Zusammenhang mit adaptiven Regelungen, ist für rekursive Parameterschätzverfahren die Prozeßidentifikation im geschlossenen Regelkreis.

Die dazu eingesetzten Methoden der direkten bzw. indirekten Identifikation ermöglichen auf der Grundlage der IV-Methode die Ermittlung der Schätzergebnisse mit nahezu derselben Güte wie

im offenen Kreis. Bei der indirekten Methode ist dazu ein erheblicher numerischer Aufwand erforderlich; dagegen wird der Rechenaufwand beim Einsatz der in dieser Arbeit vorgeschlagenen direkten Methode, die auf einer geringfügigen Modifikation des IV-Algorithmus beruht, gegenüber einer Schätzung im offenen Kreis nicht erhöht.

Aufgrund der an den untersuchten Systemen gewonnenen Erfahrungen und Ergebnisse konnten verschiedene Richtlinien aufgestellt werden, die den Einsatz der rekursiven Parameterschätzverfahren im Vergleich zur bisherigen Praxis erheblich erleichtern. Die Gültigkeit dieser Richtlinien kann einerseits durch die große Zahl der Identifikationsläufe in statistischem Sinne, andererseits durch die Erprobung an einem realen Prozeß auch von der praktischen Anwendung her als weitgehend bestätigt angesehen werden.

Trotzdem sollte aufgrund des statistischen Charakters aller im Rahmen dieser Arbeit nur an zwei speziellen Systemen 2. und 3. Ordnung erzielten Ergebnisse eine Übertragung dieser Erfahrungen und Richtlinien auf andere Systeme nur sehr sorgfältig und kritisch vorgenommen werden.

8. LITERATURVERZEICHNIS

=====

- [1] Eykhoff, P., M. van den Grinten, H. Kwakernaak und B. Veltman: Systems modelling and identification. 3. IFAC-Weltkongreß, London (1966), Survey paper.
- [2] Cuenod, M. und A. Sage: Comparison of some methods used for process identification. IFAC-Symposium, Prag (1967), paper O.1.
- [3] Balakrishnan, A. und V. Peterka: Identification in automatic control systems. 4. IFAC-Weltkongreß, Warschau (1969), Survey paper 9.
- [4] Aström, K. und P. Eykhoff: System identification - a survey. Automatica 7 (1971), S. 123-162.
- [5] Eykhoff, P.: Process parameter and state estimation. Automatica 4 (1968), S. 205-233.
- [6] Niemann, R., D.G. Fisher und D.E. Seborg: A review of process identification and parameter estimation techniques. Int. J. Control 13 (1971), S. 209-264.
- [7] Eykhoff, P.: System identification. J. Wiley, London (1974).
- [8] Isermann, R.: Prozeßidentifikation. Springer Verlag, Berlin (1974).
- [9] Unbehauen, H., B. Bauer, B. Göhring und Chr. Schmid: "On line"-Identifikationsverfahren. PDV-Bericht KFK-PDV 14, Gesellschaft für Kernforschung, Karlsruhe (1973).

- [10] Unbehauen, H., B. Göhring und B. Bauer: Parameterschätzverfahren zur Systemidentifikation. Oldenbourg Verlag, München (1974).
- [11] Söderström, T., L. Ljung und I. Gustavsson: A comparative study of recursive identification methods. Report 7427, Lund Institute of Technology, Lund (1974).
- [12] Sage, A. und J. Melsa: System identification. Academic Press, New York (1970).
- [13] Sage, A. und J. Melsa: Estimation theory. Mc Graw-Hill, New York (1971).
- [14] Aström, K.: Introduction to stochastic control theory. Academic Press, New York (1970).
- [15] Nahi, N.E.: Estimation theory and applications. J. Wiley, New York (1969).
- [16] Mendel, J.M.: Discrete techniques of parameter estimation. Marcel Dekker, New York (1973).
- [17] Gustavsson, I.: Comparison of different methods for identification of industrial processes. Automatica 8 (1972), S. 127-142.
- [18] Göhring, B.: Erprobung statistischer Parameterschätzmethoden und Strukturprüfverfahren zur experimentellen Identifikation von Regelsystemen. Dissertation Universität Stuttgart (1973).
- [19] Isermann, R., U. Baur, W. Bamberger, P. Kneppo und H. Siebert: Comparison and evaluation of six on-line identification and parameter estimation methods with three simulated processes. IFAC-Symposium, Delft (1973), paper E-1 und Automatica 10 (1974), S. 81-103.

- [20] Baur, U.: On-line Parameterschätzverfahren zur Identifikation linearer dynamischer Prozesse mit Prozeßrechnern - Entwicklung, Vergleich, Erprobung. Dissertation Universität Stuttgart (1975) und PDV-Bericht KFK-PDV 65, Gesellschaft für Kernforschung, Karlsruhe (1976).
- [21] Clarke, D.W.: Generalized least squares estimation of the parameters of a dynamic model. IFAC-Symposium, Prag (1967), paper 3.17.
- [22] Hastings-James, R. und M.W. Sage: Recursive generalized least squares procedure for on-line identification of process parameters. Proc. IEE 116 (1969), S. 2057-2062.
- [23] Saridis, G.N.: Comparison of six on-line identification algorithms. Automatica 10 (1974), S. 69-79.
- [24] Smets, A.J.: The instrumental variable method and related schemes. Report 70-E-15, Eindhoven University of Technology, Eindhoven (1970).
- [25] Talmon, J.I.: Approximated Gauss-Markov estimators and related schemes. Report 71-E-17, Eindhoven University of Technology, Eindhoven (1971).
- [26] Gentil, S.: Etude comparative de diverses méthodes statistiques d'identification de systèmes dynamiques. Thesis Université Scientifique de Grenoble (1972).
- [27] Unbehauen, H. und B. Bauer: Aspects for the selection of parameter estimation methods for the identification of industrial processes. IFAC-Symposium, Tbilisi, (1976), paper 8.2.
- [28] Schenk, R.: On-line Parameterschätzverfahren. TB 6/74 Institut für Automation, A5/ED/ATR-F AEG Telefunken (1974).

- [29] Scheurer, H.G.: Ein für den Prozeßrechnereinsatz geeignetes Identifizierungsverfahren auf der Grundlage der Korrelationsfunktionen. Dissertation TU Trier-Kaiserslautern (1973).
- [30] Unbehauen, H., Chr. Schmid, F. Böttiger, B. Bauer und B. Göhring: KEDDC, ein kombiniertes Prozeßrechnerprogrammsystem zum Entwurf und Einsatz von DDC-Algorithmen. PDV-Bericht KFK-PDV 37, Gesellschaft für Kernforschung, Karlsruhe (1975).
- [31] Aström, K.: Lectures on the identification problem - the least squares method. Report 6806, Lund Institute of Technology, Lund (1968).
- [32] Wong, K.Y. und E. Polak: Identification of linear discrete time systems using the instrumental variable method. IEEE Trans. AC-12 (1967) Nr. 6, S. 707-718.
- [33] Young, P.C.: An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process. Automatica 6 (1970), S. 271-286.
- [34] Söderström, T.: An on-line algorithm for approximate maximum likelihood identification of linear dynamic systems. Report 7308, Lund Institute of Technology, Lund (1973).
- [35] Young, P.C., S.H. Shellswell und C.G. Neethling: A recursive approach to time-series analysis. Report cued/b-Control/TR 16, Universität Cambridge (1971).
- [36] Aström, K. und T. Bohlin: Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. IFAC-Symposium, Teddington (1965).
- [37] Goldberger, A.S.: Econometric theory. J. Wiley, New York (1964).

- [38] Wilks, S.: Mathematical statistics. J. Wiley, New York (1962).
- [39] Wellstead, P.E. und J.M. Edmunds: Least-squares identification of closed-loop system. Int. J. Control 21(1975), S. 689-699.
- [40] Bauer, B.: Driftelimination durch Hochpaßfilterung im Zusammenhang mit der Hilfsvariablen-Methode. Bericht 7510, Abteilung Prozeßrechner und Regelungstechnik/IVD, Universität Stuttgart (1975).
- [41] Unbehauen, H. und B. Göhring: Tests for determining model order in parameter estimation. Automatica 10(1974), S. 233-244.
- [42] Kopacek, P.: A method for the identification of linear time-varying systems. IFAC-Symposium, Tbilisi, (1976), paper 22.2.
- [43] Banka, S.: Maximum likelihood parameter estimation in discrete linear time varying dynamic systems. IFAC-Symposium, Tbilisi (1976), paper 12.2.
- [44] Scheurer, H.G.: Ein adaptives, explizites Parameterschätzverfahren mit geringem Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf. Regelungstechnik 23 (1975) Nr. 12, S.427-433.
- [45] Bray, J.M., R.J. High, A.D. Mc Cann und H. Jemmeson: On-line model making for a chemical plant. Trans. Soc. Instrum. Technol. 17 (1965) Nr.3, S. 65-75.
- [46] Norton, J.P.: Recursive identification and prediction of time-varying systems using extra information. IFAC-Symposium, Tbilisi (1976), paper 19.7.

- [63] Söderström, T., L. Ljung und I. Gustavsson: Identifiability conditions for linear multivariable systems operating under feedback. Eingereicht bei IEEE Trans. on Aut. Control.
- [64] Unbehauen, H.: Stabilität und Regelgüte linearer und nichtlinearer Regler in einschleifigen Regelkreisen bei verschiedenen Streckentypen mit P- und I-Verhalten. Fortschrittbericht VDI-Z, Reihe 8, Nr. 13, VDI-Verlag, Düsseldorf (1970).
- [65] Bauer, B.: Identifikation von Streckenparametern im geschlossenen Regelkreis bei unterschiedlichen Reglereinstellungen. Bericht 7513, Abt. Prozeßrechner und Regelungstechnik/IVD, Universität Stuttgart (1975).
- [66] Bauer, B. und B. Göhring: Einsatz und Vergleich von Parameterschätzverfahren zur Identifikation einer Überhitzeranlage. BWK 27 (1975) Nr. 9, S. 348-351.
- [67] Göhring, B. und B. Bauer: Vergleich verschiedener Verfahren zur Analyse eines auf Stoff- und Wärmebilanzen basierenden Hochofenmodells. Regelungstechnik 24(1976) Nr. 2, S. 42-46.
- [68] Bauer, B., H. Unbehauen und D. Nicolai: Identifikation ausgewählter Regelstrecken eines Dampferzeugers mit Parameterschätzverfahren. Eingereicht bei BWK.
- [69] Bauer, B., F. Böttiger, W. Funk und G. Schaal: Bedienungsanleitung und Bestimmung der statischen und dynamischen Kennwerte für die Lufterhitzeranlage. Bericht Nr. 7305, Abt. Prozeßrechner und Regelungstechnik/IVD, Universität Stuttgart (1973).

- [70] Lee, R.C.K.: Optimal estimation, identification and control. M.I.T.Press, Cambridge, Mass. (1964).

- [71] Bauer, B.: Untersuchung statistischer "on-line"-Parameterschätzverfahren an einem analog simulierten System 2. Ordnung. Bericht Nr. 7420, Abt. Prozeßrechner und Regelungstechnik/IVD, Universität Stuttgart (1974).

ANHANG A: STATISTISCHE EIGENSCHAFTEN DER SCHÄTZWERTE

A.1 Einige grundlegende Begriffe und Voraussetzungen

Def. A.1: Eine genügende und fortdauernde Anregung ("persistent excitation") des zu identifizierenden Systems liegt vor, wenn im Zusammenhang mit dem Eingangssignal $u(k)$ die Grenzwerte

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k) \quad (A.1)$$

und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k) u(k+i) = R_{uu}(i) \quad (A.2)$$

existieren und die Matrix $\underline{F}$ mit Elementen

$$f_{ij} = R_{uu}(i-j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (A.3)$$

positiv definit ist [4, 8, 31, 36].

Def. A.2: Als Schätzfehler $\tilde{\underline{p}}(N)$ auf der Grundlage von $N+n$ Messungen der Systemein- und -ausgangssignale wird die Differenz

$$\tilde{\underline{p}}(N) = \hat{\underline{p}}(N) - \underline{p} \quad (A.4)$$

zwischen geschätztem und tatsächlichem Parametervektor bezeichnet.

Mit Gl. (2.27) und (2.21) ergibt sich für $\tilde{\underline{p}}(N)$ bei den erweiterten LS-Methoden die Beziehung

$$\tilde{\underline{p}}(N) = [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{e}, \quad (A.5)$$

bei der IV-Methode mit Gl. (2.21) und (2.44)

$$\tilde{\underline{p}}(N) = [\underline{W}^T \underline{M}]^{-1} \underline{W}^T \underline{e}. \quad (A.6)$$

Def. A.3: Eine Schätzung heißt erwartungstreu oder biasfrei, wenn der Erwartungswert des Schätzfehlers für eine beliebige Zahl von Messungen gleich Null ist:

$$E\{\tilde{\underline{p}}(N)\} = E\{\hat{\underline{p}}(N) - \underline{p}\} = \underline{0} \quad (\text{A.7a})$$

bzw.

$$E\{\hat{\underline{p}}(N)\} = E\{\underline{p}\} = \underline{p}. \quad (\text{A.7b})$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann wird der resultierende systematische Fehler

$$E\{\tilde{\underline{p}}(N)\} = E\{\hat{\underline{p}}(N) - \underline{p}\} = E\{\hat{\underline{p}}(N)\} - \underline{p} \quad (\text{A.8})$$

Bias genannt.

Def. A.4: Eine Schätzung heißt konsistent im quadratischen Mittel, wenn für die Varianz des Schätzfehlers die Beziehung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{[\hat{\underline{p}}(N) - \underline{p}]^2\} = \underline{0} \quad (\text{A.9})$$

gilt. Daraus folgt, daß $\hat{\underline{p}}(N)$ mit der Wahrscheinlichkeit eins gegen den tatsächlichen Wert $\underline{p}$ konvergiert, d.h. die Schätzung ist auch konsistent:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|\hat{\underline{p}}(N) - \underline{p}| > \varepsilon) = 0 \text{ für jedes } \varepsilon > 0 \quad (\text{A.10})$$

bzw.

$$\underline{p} \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\underline{p}}(N) = \underline{p}. \quad (\text{A.11})$$

Das ist aber gleichbedeutend mit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{\underline{p}}(N)\} = \underline{p}, \quad (\text{A.12})$$

d.h. eine konsistente Schätzung ist asymptotisch erwartungstreu [8, 16].

Satz A.1 (Slutsky's Theorem): Wenn die Elemente der Matrizen $\underline{A}(N)$ und $\underline{B}(N)$ mit Wahrscheinlichkeit konvergieren, dann gilt [37, 38]:

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} [\underline{A}^{-1}(N) \cdot \underline{B}(N)] = [p \lim_{N \rightarrow \infty} \underline{A}(N)]^{-1} [p \lim_{N \rightarrow \infty} \underline{B}(N)]. \quad (\text{A.13})$$

A.2 Parameterschätzung mit den erweiterten LS-Methoden

Satz A.2: Die Parameter eines stabilen, linearen diskreten Systems können mit den erweiterten LS-Methoden im quadratischen Mittel konsistent geschätzt werden, wenn

- a) das System genügend und fortdauernd angeregt wird ("persistent excitation" nach Def. A.1) und
- b) das Fehlersignal $e(k)$ weißes Rauschen mit einer $N(0, \sigma^2)$ -Verteilung darstellt.

Beweis: Betrachtet man den asymptotischen Schätzfehler der erweiterten LS-Methoden nach Gl. (A.5)

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\underline{p}}(N) = p \lim_{N \rightarrow \infty} \{[\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{e}\} \quad (\text{A.14})$$

und wendet Slutsky's Theorem nach Satz A.1 an, so ergibt sich die Beziehung

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\underline{p}}(N) = [p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{M}^T \underline{M}]^{-1} [p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{M}^T \underline{e}]. \quad (\text{A.15})$$

Zum Nachweis des Satzes ist nun folgendes zu zeigen:

- 1) $p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{M}^T \underline{M}$ ist regulär und
- 2) $p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{M}^T \underline{e} = \underline{0}$ (Konsistenz).
- 3) Die Varianz des Schätzfehlers geht gegen Null für $N \rightarrow \infty$ (Konsistenz in quadr. Mittel).

Zu 1): Schreibt man die Gln. (2.17a) und (2.17b) als

$$y(k) = h(k) + e(k) \quad (\text{A.16})$$

und

$$v(k) = z(k) + e(k), \quad (\text{A.17})$$

so kann die symmetrische Matrix

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{R}}_{yy} & -\underline{\underline{R}}_{yu} & -\underline{\underline{R}}_{ye} & \underline{\underline{R}}_{yv} \\ & \underline{\underline{R}}_{uu} & \underline{\underline{R}}_{ue} & -\underline{\underline{R}}_{uv} \\ & & \underline{\underline{R}}_{ee} & -\underline{\underline{R}}_{ev} \\ & & & \underline{\underline{R}}_{vv} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

mit

$$\underline{\underline{R}}_{yy} = \begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \dots & R_{yy}(n-1) \\ & R_{yy}(0) & \dots & R_{yy}(n-2) \\ & & \ddots & \\ & & & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

(die übrigen Untermatrizen sind entsprechend aufgebaut) in der Form

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{R}}_{hh} & -\underline{\underline{R}}_{yu} & -\underline{\underline{R}}_{ye} & \underline{\underline{R}}_{yv} \\ & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{R}}_{ue} & -\underline{\underline{R}}_{uv} \\ & & \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{R}}_{ev} \\ & & & \underline{\underline{R}}_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^2 \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ & \underline{\underline{R}}_{uu} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ & & \sigma^2 \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ & & & \sigma^2 \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

angegeben werden. Wegen der 2. Matrix auf der rechten Seite von Gl. (A.20) ist $p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}}$ aber regulär.

Zu 2): $p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{M}^T \underline{e}$ läßt sich in der Form

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{M}^T \underline{e} = p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \sum_{i=n+1}^{n+N} y(i-1)e(i) \\ \vdots \\ \sum_{i=n+1}^{n+N} y(i-n)e(i) \\ \hline \sum_{i=n+1}^{n+N} u(i-1)e(i) \\ \vdots \\ \sum_{i=n+1}^{n+N} u(i-n)e(i) \\ \hline \sum_{i=n+1}^{n+N} e(i-1)e(i) \\ \vdots \\ \sum_{i=n+1}^{n+N} e(i-n)e(i) \\ \hline -\sum_{i=n+1}^{n+N} v(i-1)e(i) \\ \vdots \\ -\sum_{i=n+1}^{n+N} v(i-n)e(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{ye}(1) \\ \vdots \\ -R_{ye}(n) \\ \hline R_{ue}(1) \\ \vdots \\ R_{ue}(n) \\ \hline R_{ee}(1) \\ \vdots \\ R_{ee}(n) \\ \hline -R_{ve}(1) \\ \vdots \\ -R_{ve}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_{ye} \\ \hline \underline{r}_{ue} \\ \hline \underline{r}_{ee} \\ \hline \underline{r}_{ve} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

anschreiben.

Da bei einer Identifizierung im offenen Kreis das Eingangssignal u nicht mit dem Fehlersignal e korreliert ist, wird $\underline{r}_{ue}$ zu Null; ebenso $\underline{r}_{ee}$, da $e(k)$ als weißes Rauschsignal vorausgesetzt wurde. Da bei den Vektoren $\underline{r}_{ye}$ und $\underline{r}_{ve}$ die von e herrührenden Anteile in y und v nur von vergangenen Werten von e abhängen, bleiben nur Terme der Form

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=n+1}^{n+N} e(i-j)e(i) \quad \text{mit } j > 0 \quad (\text{A.22})$$

zu betrachten. Diese verschwinden jedoch ebenfalls, weil e weißes Rauschen ist.

Zu 3): Zur Ermittlung der Varianz des Schätzfehlers $\tilde{\underline{p}}$ wird dessen Kovarianzmatrix

$$\text{cov} [\tilde{\underline{p}}] = E\{\tilde{\underline{p}} \tilde{\underline{p}}^T\} = E\{\underline{P} \underline{M}^T \underline{e} \underline{e}^T \underline{M} \underline{P}^T\} \quad (\text{A.23})$$

mit

$$\underline{P} = [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \quad (\text{A.24})$$

nach Gl. (2.29) gebildet. Da $\underline{M}$ und $\underline{e}$ nach Teil 2) des Beweises für große N statistisch unabhängig sind, gilt für $N \rightarrow \infty$

$$\text{cov} [\tilde{\underline{p}}] = E\{\underline{P} \underline{M}^T\} E\{\underline{e} \underline{e}^T\} E\{\underline{M} \underline{P}^T\} \quad (\text{A.25})$$

und mit der Voraussetzung

$$E\{\underline{e} \underline{e}^T\} = \sigma^2 \underline{I} \quad (\text{A.26})$$

die Beziehung

$$\underline{P}^* = \text{cov} [\tilde{\underline{p}}] = \sigma^2 E\{\underline{P}\}. \quad (\text{A.27})$$

Schreibt man dafür mit Hilfe von Slutsky's Theorem und Gl. (A.24)

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov} [\tilde{\underline{p}}] &= \sigma^2 \underline{P} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N} \underline{M}^T \underline{M} \right]^{-1} \right\} \\ &= \sigma^2 \left[\underline{P} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \right] \cdot \left[\underline{P} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{M}^T \underline{M} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

so folgt daraus mit Teil 1) des Beweises

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov} [\tilde{\underline{p}}] = \underline{0}. \quad (\text{A.29})$$

Die Varianzen der einzelnen Schätzfehler, die auf der Hauptdiagonalen stehen, verschwinden somit für $N \rightarrow \infty$.

Die Schätzung mit den erweiterten LS-Methoden ist damit konsistent im quadratischen Mittel, sofern die Voraussetzungen erfüllt sind (zum Beweis des Satzes siehe auch [4, 7, 16, 24, 25, 31, 35, 39]).

A.3 Parameterschätzung mit der IV-Methode

Satz A.3: Die Parameterschätzung mit der IV-Methode ist konsistent, wenn die Bedingungen (2.40) und (2.41) erfüllt sind:

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{W}^T \underline{M} \quad \text{regulär} \quad (\text{A.30})$$

und

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{W}^T \underline{e} = \underline{0}. \quad (\text{A.31})$$

Beweis: Betrachtet man den asymptotischen Schätzfehler der IV-Methode nach Gl. (A.6)

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\underline{p}}(N) = p \lim_{N \rightarrow \infty} \{ [\underline{W}^T \underline{M}]^{-1} \underline{W}^T \underline{e} \} \quad (\text{A.32})$$

und wendet Slutsky's Theorem nach Satz A.1 an, so ergibt sich die Beziehung

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\underline{p}}(N) = [p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{W}^T \underline{M}]^{-1} [p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \underline{W}^T \underline{e}]. \quad (\text{A.33})$$

Nach den Voraussetzungen (A.30) und (A.31) ist damit

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\underline{p}}(N) = \underline{0} \quad (\text{A.34})$$

und die Schätzung ist konsistent [32].

ANHANG B: REKURSIVE VERSION DES SCHÄTZALGORITHMUS
=====

B.1 Ungewichteter Algorithmus

Zur Ableitung einer rekursiven Version der direkten Schätzgleichung multipliziert man die aus Gl. (2.29) oder (2.70) abgeleitete Beziehung

$$\underline{P}^{-1}(k) = \underline{P}^{-1}(k-1) + \underline{m}(k) \underline{m}^T(k) \quad (\text{B.1})$$

mit $\underline{P}(k)$ von links und $\underline{P}(k-1)$ von rechts und erhält

$$\underline{P}(k-1) = \underline{P}(k) + \underline{P}(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \quad (\text{B.2})$$

bzw. nach Multiplikation von rechts mit $\underline{m}(k)$

$$\underline{P}(k-1) \underline{m}(k) = \underline{P}(k) \underline{m}(k) [1 + \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \underline{m}(k)] . \quad (\text{B.3})$$

Die Multiplikation von rechts mit

$$[1 + \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \underline{m}(k)]^{-1} \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1)$$

liefert

$$\begin{aligned} \underline{P}(k-1) \underline{m}(k) [1 + \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \underline{m}(k)]^{-1} \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) &= \\ &= \underline{P}(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \end{aligned}$$

und mit Gl. (B.2)

$$\begin{aligned} \underline{P}(k-1) \underline{m}(k) [1 + \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \underline{m}(k)]^{-1} \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) &= \\ &= \underline{P}(k-1) - \underline{P}(k) \end{aligned}$$

bzw.

$$\underline{P}(k) = \underline{P}(k-1) - \underline{P}(k-1) \underline{m}(k) [1 + \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \underline{m}(k)]^{-1} \cdot \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1).$$

Daraus ergibt sich mit dem Korrekturfaktor

$$\underline{q}(k+1) = \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) [1 + \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{m}(k+1)]^{-1} \quad (B.4)$$

die Rekursivbeziehung

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k). \quad (B.5)$$

Für den gesuchten Parametervektor $\hat{\underline{p}}$ erhält man schließlich aus Gl. (2.28) unter Verwendung von Gl. (B.4) und (B.5) die Beziehung

$$\begin{aligned} \hat{\underline{p}}(k+1) &= \underline{P}(k+1) \left[\sum_{i=n+1}^k \underline{m}(i) y(i) + \underline{m}(k+1) y(k+1) \right] \\ &= [\underline{P}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k)] \left[\sum_{i=n+1}^k \underline{m}(i) y(i) + \underline{m}(k+1) y(k+1) \right] \\ &= \hat{\underline{p}}(k) + \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) y(k+1) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \hat{\underline{p}}(k) - \\ &\quad - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) y(k+1) \\ &= \hat{\underline{p}}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \hat{\underline{p}}(k) + \\ &\quad + [\underline{P}(k) \underline{m}(k+1) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{m}(k+1)] y(k+1) \\ &= \hat{\underline{p}}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \hat{\underline{p}}(k) + [\underline{P}(k) \underline{m}(k+1) - \\ &\quad - \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) + \underline{q}(k+1)] y(k+1) \\ &= \hat{\underline{p}}(k) + \underline{q}(k+1) [y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \hat{\underline{p}}(k)] \end{aligned}$$

und damit

$$\underline{\hat{p}}(k+1) = \underline{\hat{p}}(k) + \underline{q}(k+1) \underline{\hat{e}}(k+1) \quad (\text{B.6})$$

mit

$$\underline{\hat{e}}(k+1) = y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \underline{\hat{p}}(k). \quad (\text{B.7})$$

Die Gleichungen (B.4) bis (B.7) beinhalten damit die rekursive Version des Schätzalgorithmus.

B.2 Gewichteter Algorithmus

Um eine rekursive Version der direkten Schätzgleichung der gewichteten IV-Methode zu erhalten, multipliziert man die aus Gl. (4.10) bzw. (2.46) abgeleitete Beziehung

$$\underline{P}^{-1}(k) = \rho(k) [\underline{P}^{-1}(k-1) + \underline{w}(k) \underline{m}^T(k)] \quad (\text{B.8})$$

mit $\underline{P}(k)$ von links und $\underline{P}(k-1)$ von rechts und erhält

$$\underline{P}(k-1) = \rho(k) [\underline{P}(k) + \underline{P}(k) \underline{w}(k) \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1)] \quad (\text{B.9})$$

bzw. nach Multiplikation von rechts mit $\underline{w}(k)$

$$\underline{P}(k-1) \underline{w}(k) = \rho(k) \underline{P}(k) \underline{w}(k) [1 + \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \underline{w}(k)]. \quad (\text{B.10})$$

Die Multiplikation von rechts mit

$$[1 + \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \underline{w}(k)]^{-1} \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1)$$

liefert

$$\begin{aligned} \underline{P}(k-1) \underline{w}(k) [1 + \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \underline{w}(k)]^{-1} \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) &= \\ &= \rho(k) \underline{P}(k) \underline{w}(k) \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \end{aligned}$$

und mit Gl. (B.9)

$$\begin{aligned} \underline{P}(k-1) \underline{w}(k) [1 + \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \underline{w}(k)]^{-1} \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) = \\ = \underline{P}(k-1) - \rho(k) \underline{P}(k) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \underline{P}(k) = \frac{1}{\rho(k)} \{ \underline{P}(k-1) - \underline{P}(k-1) \underline{w}(k) [1 + \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \underline{w}(k)]^{-1} \cdot \\ \cdot \underline{m}^T(k) \underline{P}(k-1) \}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit dem Korrekturfaktor

$$\underline{q}(k+1) = \underline{P}(k) \underline{w}(k+1) [1 + \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{w}(k+1)]^{-1} \quad (\text{B.11})$$

die Rekursivbeziehung

$$\underline{P}(k+1) = \frac{1}{\rho(k+1)} [\underline{P}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k)]. \quad (\text{B.12})$$

Für den gesuchten Parametervektor $\hat{\underline{p}}$ erhält man schließlich aus Gl. (4.9) bzw. (2.45) unter Verwendung von Gl. (B.11) und (B.12) die Beziehung

$$\begin{aligned} \hat{\underline{p}}(k+1) &= \underline{P}(k+1) \rho(k+1) \left[\sum_{i=n+1}^k \pi \rho(j) \underline{w}(i) y(i) + \underline{w}(k+1) y(k+1) \right] \\ &= [\underline{P}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k)] \left[\sum_{i=n+1}^k \pi \rho(j) \underline{w}(i) y(i) + \right. \\ &\quad \left. + \underline{w}(k+1) y(k+1) \right] \\ &= \hat{\underline{p}}(k) + \underline{P}(k) \underline{w}(k+1) y(k+1) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \hat{\underline{p}}(k) - \\ &\quad - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{w}(k+1) y(k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underline{\hat{p}}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{\hat{p}}(k) + \\
 &\quad + [\underline{p}(k) \underline{w}(k+1) - \underline{p}(k) \underline{w}(k+1) + \underline{q}(k+1)] y(k+1) \\
 &= \underline{\hat{p}}(k) + \underline{q}(k+1) [y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \underline{\hat{p}}(k)]
 \end{aligned}$$

und damit

$$\underline{\hat{p}}(k+1) = \underline{\hat{p}}(k) + \underline{q}(k+1) \hat{e}(k+1) \quad (\text{B.13})$$

mit

$$\hat{e}(k+1) = y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \underline{\hat{p}}(k). \quad (\text{B.14})$$

Die Gleichungen (B.11) bis (B.14) beinhalten damit die rekursive Version des gewichteten IV-Schätzalgorithmus.

ANHANG C: REKURSIVALGORITHMUS FÜR DEN VEKTOR $\underline{m}$ BEI DER
RML-METHODE

Definiert man die Ableitung des Fehlersignals e nach $\underline{p}$
durch den Vektor

$$\underline{e}_{\underline{p}}^T = [e_{a1} \dots e_{an} \ e_{b1} \dots e_{bn} \ e_{c1} \dots e_{cn}], \quad (C.1)$$

so erhält man aus Gl. (2.73) im Zeitbereich die Darstellung

$$e_{ai}(k) + \sum_{j=1}^n c_j e_{ai}(k-j) = y(k-i) \quad (i=1, \dots, n). \quad (C.2)$$

Für $i = 1$ ergibt sich daraus die Beziehung

$$e_{a1}(k) + \sum_{j=1}^n c_j e_{a1}(k-j) = y(k-1) \quad (C.3)$$

bzw. durch Verschiebung

$$e_{a1}(k-i+1) + \sum_{j=1}^n c_j e_{a1}(k-j-i+1) = y(k-i). \quad (C.4)$$

Im z -Bereich läßt sich dafür

$$z^{-i+1} C(z^{-1}) \frac{\partial E(z)}{\partial a_1} = z^{-i} Y(z) \quad (i=1, \dots, n) \quad (C.5)$$

anschreiben. Daraus ergibt sich aber mit Gl. (2.73)

$$C(z^{-1}) \frac{\partial E(z)}{\partial a_i} = z^{-i+1} C(z^{-1}) \frac{\partial E(z)}{\partial a_1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (C.6)$$

bzw.

$$e_{ai}(k) = e_{a1}(k-i+1) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (C.7)$$

und daraus durch Substitution von Gl. (C.3)

$$e_{a1}(k+1) = y(k) - \sum_{j=1}^n c_j e_{aj}(k). \quad (C.8)$$

Aus Gl. (2.74) und (2.75) ergeben sich durch dieselbe Vorgehensweise die Beziehungen

$$e_{bi}(k) = e_{b1}(k-i+1), \quad (C.9)$$

$$e_{ci}(k) = e_{c1}(k-i+1) \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (C.10)$$

$$e_{b1}(k+1) = -u(k) - \sum_{j=1}^n c_j e_{bj}(k) \quad (C.11)$$

und

$$e_{c1}(k+1) = -e(k) - \sum_{j=1}^n c_j e_{cj}(k). \quad (C.12)$$

Für $\underline{p} = \hat{\underline{p}}(k)$ erhält man daraus unter Berücksichtigung von Gl. (2.67) die Rekursivbeziehung für $\underline{m}(k+1)$ nach Gl. (2.76).

L E B E N S L A U F

Am 18. März 1946 wurde ich als Sohn des Metzgermeisters Josef Bauer und seiner Ehefrau Waltraud geb. Bolg in Neckarsulm geboren. Nach dem Besuch der Volksschule von 1952 bis 1956 wechselte ich in das Albert Schweitzer-Gymnasium Neckarsulm über. Dort legte ich im Frühjahr 1965 die Reifeprüfung ab.

Nach 2 Jahren Dienstzeit bei der Bundeswehr begann ich im Frühjahr 1967 an der Universität Stuttgart das Studium der Mathematik. Die Diplomprüfung legte ich im Sommer 1972 mit Erfolg ab.

Seit Oktober 1972 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Herrn Professor Dr.-Ing. H. Unbehauen in der Abteilung Prozeßbrechner und Regelungstechnik des Instituts für Verfahrenstechnik und Dampfkesselwesen von Professor Dr.-Ing. R. Quack an der Universität Stuttgart tätig.

